

Non-cooperative Interactions Between Government and Central Bank in Public Debt Management: A Differential Games Approach

Behzad Shahbaie¹, Alireza Bahiraie^{2*},

¹ PhD student, Faculty of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran

E-mail addresses: bshahbaee@semnan.ac.ir (B. Shahbaie), ORCID: 0009-0003-6938-9181

² Assistant Professor, Department of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran

E-mail addresses: alireza.bahiraie@semnan.ac.ir (A. Bahiraie), ORCID:0000-0003-1116-0811

Abstract

The government and the central bank are key components of a country's economic structure. The equilibrium levels of major macroeconomic variables such as public debt, fiscal deficit (including government spending and tax revenues), and the monetary base are jointly determined by the behavior and policies of these two institutions. Accordingly, this study develops a non-cooperative game model based on linear-quadratic control to examine the interaction between the government and the central bank in determining the optimal values of these variables. In the proposed model, government spending and tax revenues replace the fiscal deficit, allowing the equilibrium paths of each variable and their speed of convergence toward equilibrium to be computed separately over time. The numerical simulations indicate that the way the fiscal policymaker's control variables are related has a significant effect on the model's equilibrium outcomes. When these two variables are entered into the model as interdependent, the equilibrium levels of public debt, fiscal deficit, and the monetary base decline substantially, and the speed of convergence to equilibrium increases. The findings suggest that stronger coordination between government fiscal policies (spending and tax revenues) and the central bank's monetary policies can lead to relatively improved economic outcomes. Moreover, a comparison of the numerical simulation results across non-cooperative, cooperative, and Stackelberg games shows that, under the Stackelberg setting (with the government as leader and the central bank as follower), the performance is superior in terms of reducing the fiscal deficit, controlling the monetary base, stabilizing public debt, and increasing the speed of convergence to equilibrium.

KEYWORDS: Monetary and fiscal policies, Public debt, Non-cooperative games, Tax revenue, Government spending.

JEL Classification: E63, H63, C72, H5

^{2*} Corresponding Author: Alireza Bahiraie, Assistant Professor, Department of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran

E-mail addresses: alireza.bahiraie@semnan.ac.ir (A. Bahiraie)

Address:

Faculty of Mathematics, Statistics, and Computer Science, Campus No. 1, Opposite Soukan Park, Semnan, Iran,
Postal Code: 35131-19111

Telephone: +98 23 3153 5757

Fax: +98 23 3153 5758

Extended Abstract

1. Introduction

One of the central challenges in economic policymaking is achieving sustainable growth, controlling inflation, and maintaining financial stability. Governments and central banks play key roles in this process through the use of fiscal and monetary policies. While fiscal policy implemented via public spending and taxation primarily affects the demand side of the economy, monetary policy through instruments such as the monetary base and interest rates seeks to regulate liquidity, control inflation, and stabilize prices. The effectiveness of these policies largely depends on the degree of coordination between them. However, in many developing economies, including Iran, differences in institutional objectives and constraints often lead to policy misalignments, with public debt emerging as one of the most affected variables.

This study employs a non-cooperative differential game framework to analyze the strategic interaction between government and central bank in the Iranian economy. Unlike traditional models that treat fiscal policy through a single aggregate variable such as the budget deficit, this approach distinguishes between government expenditures and tax revenues, allowing for a more nuanced analysis of their separate and combined effects on public debt dynamics. By incorporating simulations based on Iran's economic data over the past two decades, the research highlights how different fiscal structures can influence debt sustainability, monetary expansion, and overall macroeconomic stability. The findings provide valuable insights for policymakers seeking to design more coherent strategies to manage debt, control liquidity, and mitigate macroeconomic instability.

2. Method

The study examines government debt in a differential game framework, focusing on convergence to the steady state. The primary fiscal deficit is represented by $f(t)$, the monetary base by $m(t)$, government debt due to the interest rate is represented as $rd(t)$, and the increase in government debt is denoted as $\dot{d}$. The model disentangles government spending and tax revenues, providing a more rigorous analysis than traditional models that rely on a fiscal deficit measure. The study also examines government debt in a differential game framework, focusing on strategies that eventually converge to a steady state, maintaining government debt at a constant and desirable level. Two approaches are proposed to replace the variables of the fiscal policy maker in the equation of state: using two control variables as independent and separate variables in the equation of state, or using two control variables as dependent variables instead of financial deficit in the equation.

2.1. Fiscal Policy Control Variables are Independent:

In this section, the fiscal policy (government) control variables, including government spending and tax revenue, are independently included in the government equation. The equation of state for public debt is considered as follows:

$$\dot{d} = rd(t) + G(t) - T(t) - \dot{m}(t). \quad d(0) = d_0. \quad (1)$$

the limit Minimization and Euler-Lagrange theorem, we obtain the following differential equation system:

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = rd(t) - 2\mu_2(t) - \mu_1(t) + \bar{G} - \bar{T} - \dot{m} \\ \dot{\mu}_1(t) = (\rho - r)\mu_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}). \\ \dot{\mu}_2(t) = (\rho - r)\mu_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d}). \end{cases} \quad (2)$$

we use the following theorem to solve the system of differential equations (Mahmoudinia et al. 2016).

Now, by applying the above theorem, the balance level of public debt, government spending, tax revenue, and monetary base can be determined as follows:

$$d^e(t) = \left(d_0 + \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-2\bar{d}\tau}{\beta_1} \right) e^{\beta_2 t} - \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-2\bar{d}\tau}{\beta_1} \quad (3)$$

such that the values of β_1 and β_2 are calculated as

$$\begin{aligned} \beta_1 &= r^2 - r\rho + \theta + 2\tau. \\ \beta_2 &= \frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - 4r\rho + 4r^2 + 8r + 4\theta}}{2}. \end{aligned}$$

To obtain the equilibrium level of the monetary base ($m^e(t)$), we first derive the function $\mu_1^e(t)$ by utilizing the following equations:

$$\mu_1^e(t) = \alpha \frac{\theta}{\tau} e^{\beta_2 t} + \frac{\theta(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})}{\beta_1} + \frac{\theta\bar{d}(r^2-r\rho+2\tau)-2\theta\bar{d}\tau}{\beta_3}. \quad (4)$$

where the values of α and β_3 are obtained as

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2\tau + \theta} \tau(\beta_2 - r) \left(d_0 + \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-2\tau\bar{d}}{\beta_1} \right). \\ \beta_3 &= r^3 - 2r^2\rho + r\rho^2 + 2r\tau + \theta r - 2\tau\rho - \rho\theta \end{aligned}$$

As a result, it can be written: $m^e(t) = \bar{m} + \mu_1^e(t)$.

In addition, the equilibrium levels of government spending and tax revenue can be derived using the following equation

$$(5) \quad \mu_2^e(t) = \alpha e^{\beta_2 t} + \frac{\tau(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})}{\beta_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2-r\rho+\theta)-\theta\bar{d}\tau}{\beta_3}.$$

The equilibrium function for government spending $G^e(t)$ and tax revenue $T^e(t)$ is derived ($G^e(t) = \bar{G} - \mu_2^e(t)$, $T^e(t) = \bar{T} + \mu_2^e(t)$).

2.2. Interdependent control variables: government spending and tax revenue in the model.

In this section, the control variables of the financial policymaker (government), which include government spending and tax revenues, are included in the government equation in a dependent manner.

According to the conditions and explanations in paragraph 1, we consider a case where there is a definite dependence between the control variables of government spending ($G(t)$) and tax revenue ($T(t)$). The equation of state, the financial policymaker's intertemporal loss function, and the monetary policymaker's intertemporal loss function are as follows.

$$\dot{d} = rd(t) + (G(t) - T(t)) - m(t). d(0) = d_0 \quad (6)$$

In this model, as stated, ($f(t) = G(t) - T(t)$) indicates the government's financial deficit. The financial policymaker (the government).

Based on this, we will have the following differential equation

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{d}(t) = rd(t) - \mu_2(t) - \mu_1(t) + \bar{G} - \bar{T} - \bar{m} \\ \dot{\mu}_1(t) = (\rho - r)\mu_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}). \\ \dot{\mu}_2(t) = (\rho - r)\mu_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d}). \end{cases}$$

By solving this device, the first-order differential equations of the following equilibrium functions are obtained:

$$d^e(t) = \left(d_0 + \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-\tau\bar{d}}{\gamma_1} \right) e^{\gamma_2 t} - \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-\tau\bar{d}}{\gamma_1} \quad (8)$$

$$m^e(t) = \bar{m} + \alpha \frac{\theta}{\tau} e^{\beta_2 t} + \frac{\theta(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})}{\gamma_1} + \frac{\theta\bar{d}(r^2-r\rho+\tau)-\theta\bar{d}\tau}{\gamma_3} \quad (9)$$

$$f^e(t) = \bar{G} - \bar{T} - \left(\alpha e^{\beta_2 t} + \frac{\tau(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})}{\gamma_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2-r\rho+\theta)-\theta\bar{d}\tau}{\gamma_3} \right). \quad (10)$$

where the values of α , γ_1 , γ_2 and γ_3 are obtained as follows

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= r^2 - r\rho + \tau + \theta. \\ \gamma_2 &= \frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - 4r\rho + 4r^2 + 4\tau + 4\theta}}{2}. \\ \alpha &= -\frac{1}{\tau + \theta} \tau(\gamma_2 - r) \left(d_0 + \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-\tau\bar{d}}{\gamma_1} \right) \\ \gamma_3 &= r^3 - 2r^2\rho + r\rho^2 + r\tau + \theta r - \tau\rho - \rho\theta \end{aligned}$$

3. Numerical simulation and analysis of results

Our non-cooperative game simulations show that when fiscal policy variables interact independently with the central bank, public debt stabilizes at 0.173, while the fiscal deficit and monetary base reach 0.08 and 0.75, respectively. However, considering interdependence between these variables lowers the steady-state values to 0.160, 0.067, and 0.062 for public debt, fiscal deficit, and monetary base, respectively. This suggests that a coordinated fiscal policy, accounting for the interactions between spending and tax revenue, leads to more favorable equilibrium outcomes.

Numerical simulation of the model shows that coordinating fiscal and monetary policies can effectively manage public debt and deficit. By linking government spending and tax revenue, the government can increase economic stability. The central bank can support these efforts through tools such as controlling the monetary base. This coordinated approach will reduce reliance on expansionary monetary policies and help stabilize prices. Also, coordinated policies improve government finances, reduce economic risks, and increase overall welfare.

These findings suggest that a non-cooperative approach, where the government independently manages tax revenues and optimizes expenditures, can yield favorable results while reducing economic risks.

Funding

There is no funding support.

Authors' Contribution

The authors contributed equally to the conceptualization and writing. All of the authors approved the content of the manuscript and agreed on all aspects of the work.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Acknowledgments

The authors appreciate all the scientific consultants in this paper.

تقابل غیرهمکارانه دولت و بانک مرکزی در مدیریت بدهی عمومی: یک رویکرد از نظریه بازیهای دیفرانسیلی

بهزاد شاه بایی کوتنایی^۱، علیرضا بحیرایی^۲*

1 دانشجوی دکترا، گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

ایمیل: (B. Shahbaie) bshahbaee@semnan.ac.ir، شناسه اراکید: <https://orcid.org/0009-0003-6938-9181>

۲* استادیار، گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

ایمیل: (A. Bahiraie) alireza.bahiraie@semnan.ac.ir، شناسه اراکید: <https://orcid.org/0000-0003-1116-0811>

چکیده:

دولت و بانک مرکزی از اجزای مهم ساختار اقتصادی کشورها به‌شمار می‌روند. مقادیر تعادلی برخی متغیرهای کلان اقتصادی، مانند بدهی عمومی، کسری مالی (شامل هزینه‌های دولت و درآمدهای مالیاتی) و پایه پولی، به‌طور مشترک و بر اساس رفتار و سیاست‌های دولت و بانک مرکزی تعیین می‌شوند. بر این اساس، در این پژوهش تعامل میان دولت و بانک مرکزی برای تعیین مقادیر بهینه این متغیرها، در قالب یک مدل بازی غیرهمکارانه مبتنی بر کنترل خطی درجه دوم ارائه شده است. در مدل پیشنهادی، هزینه‌های دولت و درآمد مالیاتی جایگزین کسری مالی شده‌اند تا مقادیر تعادلی هریک از این متغیرها به‌صورت مجزا در طول زمان و نیز سرعت همگرایی آن‌ها به سمت تعادل محاسبه شود. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که نحوه ارتباط بین متغیرهای کنترل سیاست‌گذار مالی تأثیر قابل توجهی بر نتایج تعادلی مدل دارد. هنگامی که این دو متغیر به صورت وابسته در مدل وارد می‌شوند، سطح بدهی عمومی، کسری مالی و پایه پولی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد و سرعت همگرایی به سمت مقادیر تعادلی نیز افزایش می‌یابد. یافته‌های این پژوهش حاکی از آن است که هماهنگی بیشتر میان سیاست‌های مالی دولت (هزینه‌های دولت و درآمدهای مالیاتی) در تعامل با سیاست‌های پولی بانک مرکزی می‌تواند به بهبودی نسبی نتایج اقتصادی منجر شود. همچنین مقایسه نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی میان بازی‌های غیرهمکارانه، همکارانه و استکالبرگ نشان می‌دهد در حالت استکالبرگ (دولت نقش رهبر و بانک مرکزی نقش پیرو) عملکرد بهتری از نظر کاهش کسری بودجه، کنترل پایه پولی، تثبیت بدهی عمومی و افزایش سرعت همگرایی به سمت تعادل دارد.

^۲ نویسنده مسئول: علیرضا بحیرایی، استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

پست الکترونیکی: (alireza.bahiraie@semnan.ac.ir: علیرضا بحیرایی)

نشانی: دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، پردیس شماره ۱، روبه‌روی پارک سوکان، سمنان، ایران، کد پستی 35131-19111:

تلفن +98 23 3153 5757:

دورنگار +98 23 3153 5758:

واژه های کلیدی: سیاست‌های پولی و مالی؛ بدهی عمومی؛ بازی‌های غیر همکارانه؛ درآمد مالیاتی؛ مخارج دولت؛ پایه پولی؛ بازی‌های دیفرانسیلی.

۱. مقدمه:

یکی از اهداف اساسی سیاست‌گذاران اقتصادی، تحقق رشد پایدار همراه با کنترل تورم و حفظ ثبات مالی است؛ اهدافی که از طریق دو دسته ابزار اصلی دنبال می‌شوند: سیاست‌های مالی در اختیار دولت و سیاست‌های پولی در اختیار بانک مرکزی. دولت با مدیریت هزینه‌ها و درآمدهای مالیاتی بر متغیرهای کلان اثر می‌گذارد و بانک مرکزی نیز با تنظیم پایه پولی و نرخ بهره در پی کنترل نقدینگی و ثبات قیمت‌هاست. با وجود اهمیت هماهنگی این دو دسته سیاست، در بسیاری از کشورها، به‌ویژه اقتصادهای در حال توسعه مانند ایران که با کسری بودجه مزمن، تورم بالا و استقلال محدود بانک مرکزی مواجه‌اند، چنین هماهنگی به‌سادگی به دست نمی‌آید و حتی گاه سیاست‌ها در تضاد با یکدیگر قرار می‌گیرند (نگیون و لونگ^۱، ۲۰۲۱؛ نیکویی‌نژاد و همکاران^۲، ۲۰۲۱).

تحلیل این رابطه پیچیده بین دولت و بانک مرکزی نیازمند چارچوب‌های نظری پویاست که بتوانند رفتار راهبردی این دو نهاد را در گذر زمان مدل‌سازی کنند. نظریه بازی‌های دیفرانسیلی یکی از ابزارهای مناسب در این زمینه است که به‌ویژه برای بررسی تعاملات غیرهمکارانه در اقتصادهای دارای چندسیاست‌گذار کاربرد گسترده‌ای یافته است. در این رویکرد، هر بازیگر با توجه به اهداف خود و محدودیت‌های اقتصادی، مسیر بهینه‌ای را برای تصمیم‌گیری ترسیم می‌کند. هم‌زمان، نتایج تصمیم هر نهاد به واکنش نهاد دیگر نیز وابسته است. مطالعاتی مانند تابلینی^۳ (۱۹۸۶)، پتیت^۴ (۱۹۸۹) و چی بی و همکاران^۵ (۲۰۲۴) نشان داده‌اند که استفاده از چارچوب بازی‌های دیفرانسیلی در تحلیل سیاست‌گذاری می‌تواند پیامدهای مهمی برای ثبات مالی، کنترل کسری بودجه و تنظیم بدهی عمومی به همراه داشته باشد.

در این پژوهش، با استفاده از چارچوب بازی‌های دیفرانسیلی غیرهمکارانه، رفتار راهبردی دولت و بانک مرکزی در تعیین متغیرهای کلیدی مانند پایه پولی، مالیات و مخارج عمومی بررسی می‌شود. در این مدل، مخارج و مالیات به‌صورت جداگانه و مستقل وارد مدل می‌شوند تا اثر ترکیب آن‌ها بر بدهی عمومی به‌دقت تحلیل شود. همچنین، ساختارهای متفاوتی برای وابستگی یا استقلال میان این دو ابزار بررسی شده تا مشخص شود نحوه تعامل آن‌ها چگونه بر پایداری مالی تأثیر می‌گذارد. از اهداف اصلی این پژوهش:

- تحلیل نقش جداگانه مخارج دولت و مالیات در مدیریت بدهی عمومی؛
- بررسی ساختارهای مختلف سیاست مالی (مستقل یا وابسته) در چارچوب بازی‌های غیرهمکارانه؛
- شبیه‌سازی عددی مسیرهای تعادلی با استفاده از پارامترهای اقتصاد ایران؛

با توجه این، تحلیل تعارض‌های سیاستی میان دولت و بانک مرکزی در اقتصاد ایران، از مدل بازی دیفرانسیلی غیرهمکارانه با ساختار اطلاعاتی حلقه باز استفاده شده است. نوآوری اصلی پژوهش در این است که به‌جای در نظر گرفتن کسری بودجه به‌عنوان یک متغیر ترکیبی، دو ابزار سیاست مالی یعنی مخارج دولت و درآمد مالیاتی به‌طور مستقل وارد مدل شده‌اند. این تفکیک امکان

¹ Nguyen and Luong

² Nikooeinejad, et al.

³ Tabellini

⁴ Petit

⁵ Chibi, et al.

بررسی دقیق تر آثار هر یک از اجزای سیاست مالی را فراهم می‌آورد و نشان می‌دهد که ترکیب متفاوتی از این دو ابزار چگونه می‌تواند بر بدهی عمومی، پایه پولی و مسیر تعادلی اقتصاد اثرگذار باشد.

وضعیت بدهی عمومی در ایران

بررسی روند بدهی عمومی در ایران نشان می‌دهد که این متغیر طی سال‌های اخیر به‌طور مستمر افزایش یافته و تحت تأثیر عوامل اقتصادی، ساختاری و نهادی قرار داشته است. این روند به‌ویژه در بستر کاهش درآمدهای نفتی، رشد هزینه‌های جاری مانند حقوق و یارانه‌ها، محدودیت گسترش پایه مالیاتی و شکاف پایدار میان منابع و مصارف بودجه‌ای شکل گرفته است؛ شکافی که دولت را به استفاده از ابزارهایی چون انتشار اوراق بدهی داخلی و تسهیلات بانکی برای تأمین کسری سوق داده و آثار متنوعی بر متغیرهای پولی و مالی گذاشته است.

از نظر نهادی، مدیریت بدهی عمومی در ایران در حال گذار است؛ هرچند اقداماتی نظیر ثبت و گزارش بدهی بدهی، تفکیک بدهی‌های جاری و سرمایه‌ای و برنامه‌ریزی میان‌مدت برای بازپرداخت انجام می‌شود، اما گزارش‌ها همچنان بر ضرورت تقویت هماهنگی نهادی، افزایش شفافیت آماری و توسعه بازار بدهی برای مدیریت فعال‌تر تأکید دارند. با توجه به پیوندهای میان سیاست‌های مالی و پولی، بخشی از ابزارهای تأمین مالی دولت به‌طور غیرمستقیم بر پایه پولی و نقدینگی اثر می‌گذارد؛ موضوعی که اهمیت هماهنگی میان نهادهای سیاست‌گذار را برای هدایت تصمیمات در راستای ثبات کلان دوجندان می‌کند (حاجی امینی، ۲۰۱۹؛ آدریان و همکاران، ۲۰۲۴). در نهایت، استمرار پایش بدهی عمومی، تقویت زیرساخت‌های مدیریتی و طراحی سیاست‌های متناسب با شرایط خاص اقتصاد ایران، می‌تواند به کارآمدی بیشتر سیاست‌های مالی و پایداری بلندمدت آن کمک کند.

۲. پیشینه پژوهش:

در سال‌های اخیر، تلاش‌های زیادی برای درک بهتر تعامل میان سیاست‌های پولی و مالی صورت گرفته است. این مطالعات با بهره‌گیری از مدل‌های نظری و تجربی، به بررسی آثار این تعامل بر متغیرهای کلان اقتصادی و شرایط مطلوب برای هماهنگی بین سیاست‌گذاران پرداخته‌اند. از جمله آثار پیشگام در این زمینه می‌توان به مطالعه تابلینی (۱۹۸۶) اشاره کرد که چارچوبی برای تحلیل بازی میان دولت و بانک مرکزی ارائه داد. آلسینا و تابلینی^۱ (۱۹۸۷) با افزودن نقش بخش خصوصی، نشان دادند که حتی با وجود قواعد سخت‌گیرانه پولی، فقدان هماهنگی سیاستی می‌تواند مانع بهبود رفاه اجتماعی شود. پتیت (۱۹۸۹) نیز با استفاده از نظریه بازی‌های دیفرانسیلی، اثر سناریوهای همکاری و عدم همکاری بر ثبات اقتصادی را تحلیل کرد.

در ادامه، ون آرل و همکاران^۲ (۱۹۹۷) تأکید کردند که میزان استقلال بانک مرکزی و سطح محافظه‌کاری مقامات سیاست‌گذار، اثر قابل توجهی بر تعادل پولی و مالی دارد. ون دن بروک^۳ (۲۰۰۲) نیز با معرفی مدل بازی تثبیت بدهی در افق زمانی بلندمدت، اهمیت برنامه‌ریزی میان‌مدت برای حفظ پایداری بدهی را برجسته کرد. در سطح کاربردی، انجوردا و همکاران^۴ (۲۰۱۳، ۲۰۱۶) با استفاده از مدل تابلینی و شبیه‌سازی در اقتصاد ایران، نشان دادند که رویکردهای همکارانه منجر به کاهش بدهی تعادلی، سرعت

¹ Alesina and Tabellini

² Vanaarle, et al.

³ Van den Broek

⁴ Engwerda, et al.

همگرایی بالاتر و کاهش نیاز به خلق پول می‌شوند. همچنین، در شرایط نااطمینانی، رفتار ریسک‌گریز سیاست‌گذاران موجب تثبیت بدهی در سطوح پایین‌تر می‌گردد.

محمودی‌نیا و همکاران^۱ (۲۰۱۶) با استفاده از مدل استکلبرگ در اقتصاد ایران نشان دادند که در بازی‌های با اطلاعات حلقه باز، سرعت همگرایی بیشتر و در بازی‌های بازخوردی، سطح بدهی عمومی در حالت پایدار، پایین‌تر است. آنولویس و همکاران^۲ (۲۰۱۹) نقش حق بیمه ریسک را به‌عنوان سازوکار انضباطی بازار در بازی بین سیاست‌گذاران تحلیل کردند و نشان دادند که نوع استراتژی (همکارانه یا غیرهمکارانه) بر ثبات مالی اثرگذار است. ماوردیمیتراکیس^۳ (۲۰۲۲) در زمینه اتحادیه‌های پولی، دو رویکرد بانک‌محور و بازارمحور برای تثبیت بدهی را مقایسه کرد و نشان داد هر دو می‌توانند در بهبود سطح بدهی مؤثر باشند. در مطالعات تجربی، نگیون و لونگ^۴ (۲۰۲۱) بر اساس داده‌های ۲۷ کشور در حال گذار، تأکید کردند که ضعف کنترل فساد با افزایش بدهی عمومی مرتبط است، در حالی که بهبود شاخص‌های نهادی به کاهش آن کمک می‌کند. نیکویی‌نژاد و همکاران (۲۰۲۱) با استفاده از معادلات تصادفی، اثر نوسانات درآمدی را بر پایداری سیاست‌های مالی بررسی کردند و نشان دادند که حتی در شرایط عدم قطعیت نیز، هماهنگی سیاستی می‌تواند به تثبیت بدهی منجر شود.

لی و همکاران^۵ (۲۰۲۲) با استفاده از مدل خطی-مربعی-گاوسی (LQG)^۶ نشان دادند که می‌توان راه‌حل‌های بهینه برای تعاملات استکلبرگی پیدا کرد. چافوه و همکاران^۷ (۲۰۲۲) هشدار دادند که در صورت ناهماهنگی میان سیاست‌ها، بانک مرکزی ممکن است ناچار به اجرای قواعد پولی منفعل شود، امری که اثرگذاری سیاست پولی را کاهش می‌دهد. استاوسکا و همکاران^۸ (۲۰۲۳) نیز نشان دادند که در غیاب همکاری میان دولت و بانک مرکزی، سیاست مالی اثرگذاری کمتری داشته و بانک مرکزی نقش غالب‌تری در تعیین تعادل ایفا می‌کند. بیانچی و کولیبالی^۹ (۲۰۲۴) در سطح بین‌المللی به بررسی اثر نبود هماهنگی در تعیین نرخ بهره میان بانک‌های مرکزی پرداختند و دریافتند که ناهماهنگی در مواجهه با شوک‌های شدید می‌تواند منجر به انحراف‌های قابل توجه از سطح بهینه نرخ بهره شود. چی‌بی و همکاران^{۱۰} (۲۰۲۴) در مطالعه‌ای بر اقتصاد الجزایر، سه الگوی تعاملی مختلف را مقایسه کردند و نشان دادند که راه‌حل تعاونی بیشترین اثر را در کاهش زیان رفاهی و بهبود پاسخ اقتصاد به شوک‌ها دارد. جکسون و جکسون^{۱۱} (۲۰۲۵) نیز در تحلیل پایداری بدهی در اقتصادهای پسا رشد بر ضرورت هماهنگی و انعطاف‌پذیری سیاست‌های مالی و پولی برای حفظ ثبات مالی تأکید کرده‌اند.

این مقاله با بهره‌گیری از چارچوب بازی‌های دیفرانسیلی تابلینی (۱۹۸۶)، تعارض میان سیاست‌های مالی و پولی را در چارچوب محدودیت‌های بودجه‌ای دولت بررسی می‌کند و برخلاف مدل‌های سنتی، مخارج دولت و درآمد مالیاتی را به‌عنوان دو متغیر مستقل وارد مدل کرده تا اثر ترکیب سیاست‌ها بر تثبیت بدهی عمومی به‌طور دقیق‌تری تحلیل شود.

¹ Mahmoudinia, et al.

² Anevlavis, et al.

³ Mavrodimitrakis

⁴ Nguyen and Luong

⁵ Li, et al.

⁶ Linear-Quadratic-Gaussian

⁷ Chafwele, et al.

⁸ Stawska, et al.

⁹ Bianchi and Coulibaly

¹⁰ Chibi, et al.

¹¹ Jackson and Jackson

مبانی نظری

ثبات مالی و پایداری اقتصاد کلان تا حد زیادی به هماهنگی میان سیاست‌های پولی و مالی وابسته است. نبود این هماهنگی می‌تواند نه تنها کارایی سیاست‌گذاری را کاهش دهد، بلکه زمینه‌ساز بی‌ثباتی‌های گسترده‌تری در اقتصاد شود. در بسیاری از کشورها، به‌ویژه اقتصادهای در حال گذار مانند ایران که با چالش‌هایی همچون ناترازی بودجه، تورم مزمن و وابستگی به درآمدهای نفتی روبه‌رو هستند، این ناهماهنگی نهادی میان دولت و بانک مرکزی بیش از هر زمان دیگری محسوس است. یکی از نمودهای اصلی این وضعیت، رشد بدهی عمومی است؛ شاخصی که علاوه بر بازتاب وضعیت مالی دولت، نشان‌دهنده سطح تعامل و سازگاری سیاست‌های کلان نیز محسوب می‌شود. گزارش‌های اخیر صندوق بین‌المللی پول تأکید می‌کنند که فشارهای بودجه‌ای و افزایش هزینه‌های تأمین بدهی، تضاد میان اهداف دولت و بانک مرکزی را تشدید کرده و پایداری مالی را تهدید می‌کند (آدریان و همکاران، ۲۰۲۴). در واقع، دولت‌ها غالباً با افزایش هزینه‌های عمومی در پی تحریک رشد اقتصادی و پاسخ به مطالبات اجتماعی هستند، حال آنکه بانک مرکزی با مأموریت حفظ ثبات قیمت‌ها و ارزش پول، رویکردی انقباضی اتخاذ می‌کند. این واگرایی می‌تواند سیاست‌های پولی و مالی را در مسیر متضاد قرار دهد و در نهایت به کاهش کارایی، تشدید تورم و افزایش بدهی عمومی منجر شود (آلیگیشیف و همکاران^۱، ۲۰۲۳ و کانتور و لئوناردی^۲، ۲۰۲۵).

برای تحلیل این تعاملات پویا، نظریه بازی‌های دیفرانسیلی چارچوبی قدرتمند ارائه می‌دهد که امکان مدل‌سازی رفتارهای راهبردی دولت و بانک مرکزی را در طول زمان فراهم می‌کند. این نظریه برای اولین بار توسط تابلینی (۱۹۸۶) برای بررسی تعادل بین خلق پول و کسری بودجه در یک بازی غیرهمکارانه معرفی شد و نشان داد که ناهماهنگی سیاستی می‌تواند به سیاست‌های ناپایدار و افزایش بدهی عمومی منجر شود. این مطالعه، که مبنای نظری پژوهش حاضر را تشکیل می‌دهد، چارچوبی پویا برای تحلیل تعارض‌های سیاستی در اقتصادهای با بدهی بالا ارائه کرد. مطالعات بعدی این رویکرد را گسترش دادند. پتیت (۱۹۸۹) با افزودن ساختارهای اطلاعاتی پیچیده‌تر نشان داد که رفتار راهبردی بازیگران، بسته به افق زمانی و انتظارات آن‌ها، می‌تواند به تعادل‌های پایدار یا ناپایدار منجر شود. ون در پلیگ و ون در هایدن^۳ (۱۹۹۷) نیز با مدل‌سازی تعاملات پولی-مالی در افق‌های بلندمدت، بر اهمیت هماهنگی نهادی تأکید کردند و نشان دادند که سیاست‌های همکارانه می‌توانند پایداری بدهی را بهبود بخشند.

مطالعات اخیر این چارچوب را با روش‌های مدرن‌تر و داده‌های جدیدتر غنی کرده‌اند. برای مثال، دی بارتولومئو و همکاران^۴ (۲۰۲۲) با استفاده از بازی‌های دیفرانسیلی با استراتژی‌های افق متحرک، نشان دادند که تعادل نش در اقتصادهای با بدهی بالا اغلب به سیاست‌های مالی انبساطی و نرخ‌های بهره بالا منجر می‌شود، که ثبات مالی را تضعیف می‌کند. در زمینه اقتصاد ایران، نیکویی‌نژاد و همکاران (۲۰۲۲) با مدل‌سازی عدم قطعیت درآمدی، نقش هماهنگی سیاستی در تثبیت بدهی را تأیید کردند و نشان دادند که بازی‌های غیرهمکارانه سرعت همگرایی به تعادل را کاهش می‌دهند. همچنین، چیبی و همکاران (۲۰۲۴) با تحلیل تعاملات پولی-مالی در الجزایر، بر برتری راه‌حل‌های تعاونی تأکید کردند، در حالی که احمد و همکاران^۵ (۲۰۲۴) نشان دادند که استقلال بانک مرکزی می‌تواند ناپایداری‌های ناشی از ناهماهنگی سیاستی را در اقتصادهای در حال توسعه کاهش دهد.

¹ Aligishiev, et al.

² Cantore, and Leonardi

³ van der Ploeg and van der Heijden

⁴ Di Bartolomeo, et al.

⁵ Ahmad, et al.

با وجود پیشرفت‌ها، بیشتر مدل‌های موجود ابزار مالی دولت را تنها در قالب متغیری ترکیبی مانند کسری بودجه بررسی کرده و کمتر به نقش جداگانه مخارج و مالیات پرداخته‌اند (انجوردا و همکاران، ۲۰۱۹). این رویکرد نمی‌تواند اثر مستقل یا ترکیبی هر ابزار بر پویایی بدهی عمومی را نشان دهد. در ایران نیز محمودی‌نیا و همکاران (۲۰۱۶) با مدل استکلبرگ رفتار دولت و بانک مرکزی را تحلیل کرده‌اند، اما همچنان کسری بودجه را مبنا قرار داده‌اند. شکاف موجود، انگیزه پژوهش حاضر است که با بهره‌گیری از چارچوب بازی‌های دیفرانسیلی غیرهمکارانه، اثر جداگانه و ترکیبی مخارج و مالیات بر بدهی عمومی ایران را بررسی کرده و با شبیه‌سازی عددی، توصیه‌های سیاستی برای پایداری مالی ارائه می‌دهد.

۳. مدل بازی دیفرانسیلی در تثبیت بدهی دولت

دولت و بانک مرکزی دو نهاد کلیدی در مدیریت و تثبیت بدهی عمومی‌اند. بانک مرکزی از طریق ابزارهایی مانند کنترل تورم، تنظیم نرخ بهره و حفظ ثبات مالی عمل می‌کند و دولت با سیاست‌های مالی، به‌ویژه مدیریت هزینه‌ها و درآمدهای مالیاتی، روند انباشت یا کاهش بدهی را شکل می‌دهد. به‌دلیل پیوند تنگاتنگ سیاست‌های پولی و مالی، هماهنگی این دو برای پایداری مالی ضروری است و در این میان، محدودیت پویای بودجه دولت حلقه ارتباطی اصلی میان متغیرهای کلان محسوب می‌شود. این محدودیت که به شکل یک معادله پویا بیان می‌شود، ارتباط میان کسری اولیه بودجه به صورت $f(t)$ ، پایه پولی به صورت $m(t)$ ، پرداخت بهره بدهی به صورت $rd(t)$ و نرخ تغییر بدهی عمومی به صورت $\dot{d}$ (که در آن نقطه نشان‌دهنده مشتق زمانی است) را مشخص می‌سازد.

$$\dot{d} = rd(t) + f(t) - m(t). \quad d(0) = d_0 \quad (۱)$$

در این معادله، متغیرهای $f(t)$ ، $d(t)$ و $m(t)$ به صورت نسبتی از تولید ناخالص داخلی^۱ بیان می‌شوند. همچنین، r نشان‌دهنده تفاضل میان نرخ بهره بدهی پرداخت‌نشده دولت و نرخ رشد اقتصادی است. در این چارچوب، فرض بر آن است که r یک متغیر برون‌زا بوده و مستقل از سطح بدهی دولت عمل می‌کند.

برای دستیابی به پایداری بدهی عمومی، دو رویکرد سیاستی اصلی مطرح است: نخست، کاهش کسری بودجه اولیه از طریق اجرای سیاست‌های مالی انقباضی؛ دوم، افزایش پایه پولی از طریق به‌کارگیری سیاست‌های پولی انبساطی. با این حال، هنگامی که سیاست‌گذاران اهداف متعددی نظیر کنترل تورم، تثبیت بدهی عمومی و بهبود وضعیت مالی دولت را به‌طور هم‌زمان دنبال می‌کنند، تعارض میان این دو رویکرد، به‌ویژه به دلیل آثار متضاد آن‌ها بر متغیرهای کلان نظیر تورم و رشد اقتصادی، به یکی از چالش‌های اساسی تبدیل می‌شود. برای بررسی دقیق‌تر تعامل میان سیاست‌های مالی و پولی، از یک نسخه توسعه‌یافته از مدل تابلینی استفاده می‌شود. در این مطالعه، ما یک مدل نوین را معرفی می‌کنیم که در آن، مخارج دولت و درآمدهای مالیاتی به‌عنوان دو متغیر مجزا و نه صرفاً ترکیب آن‌ها در قالب یک متغیر کسری مالی واحد - لحاظ شده‌اند. این رویکرد، امکان تحلیل تفکیکی اثرات هر یک از اجزای سیاست مالی را فراهم می‌سازد.

^۱ Gross Domestic Product (GDP)

$$\dot{d} = rd(t) + G(t) - T(t) - m(t), \quad d(0) = d_0 \quad (۲)$$

که در آن $G(t)$ هزینه‌های دولت و $T(t)$ درآمد مالیاتی را نشان می‌دهد، و همچنین با توجه به وجود کسری بودجه فرض می‌کنیم $G(t) > T(t)$.

در این مطالعه، سناریوهای منجر به انباشت کنترل‌نشده بدهی و نقض شرط عدم وجود بازی پونزی^۱ کنار گذاشته شده است. برای تضمین پایداری مالی بلندمدت، فرض می‌شود سطح بدهی دولت محدود بوده و شرط پونزی برقرار باشد؛ یعنی ارزش فعلی بدهی دولت در افق بی‌نهایت به صفر میل کند. این شرط با جلوگیری از رشد نامحدود بدهی، پیش‌شرط نظری پایداری و عدالت بین‌نسلی سیاست‌های مالی را فراهم می‌کند.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t)e^{-rt} = 0. \quad (۳)$$

فرض بر آن است که بازیگران (دولت و بانک مرکزی) از استراتژی‌هایی بهره می‌برند که در بلندمدت به تعادل یا حالت پایدار همگرا می‌شوند و در نتیجه، سطح بدهی دولت را در حدودی معقول و پایدار حفظ می‌کنند. هدف اصلی در این چارچوب، به حداقل رساندن توابع زیان هر یک از بازیگران در طول زمان است. برای دستیابی به این هدف، مجموعه‌ای از توابع کنترل مجاز، به صورت توابع انتگرال‌پذیر مربعی محلی در نظر گرفته می‌شوند. این دسته از توابع، انعطاف‌پذیری لازم را برای تنظیم تدریجی استراتژی‌های بازیکنان فراهم می‌آورند، به گونه‌ای که مسیر حرکت متغیرهای کنترلی به سمت تعادل مطلوب هدایت شده و پایداری بلندمدت در سیاست‌های مالی و پولی تضمین شود.

$$U = \{G(\cdot), T(\cdot), m(\cdot) \in L_{2,loc} | \lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = d^e, \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G^e, \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T^e, \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = m^e\}$$

که در آن d^e و m^e ، G^e ، T^e بترتیب سطوح بلند مدت تعادلی (حالت پایدار) متغیرهای کنترلی سیاستگذار مالی (درآمد مالیاتی و مخارج دولت)، متغیر کنترلی سیاستگذار پولی (پایه پولی) و بدهی عمومی را نشان می‌دهند.

دو رویکرد برای جایگزین کردن متغیرهای G و T در معادله حالت سیستم وجود دارد:

(۱) رویکرد اول دو متغیر کنترل، G و T ، مستقل از یکدیگر در معادله حالت قرار می‌گیرند.

(۲) رویکرد دوم برای حل این مسئله، استفاده از دو متغیر کنترلی به عنوان متغیرهای وابسته به جای کسری مالی (تابع f) در معادله است $(f(t) = G(t) - T(t))$.

در رویکرد نخست، مخارج دولت G و درآمدهای مالیاتی T به عنوان دو متغیر مستقل در نظر گرفته می‌شوند و آثار جداگانه هر یک بر پویایی سیستم اقتصادی به‌طور منفصل مورد تحلیل قرار می‌گیرد. این تفکیک اجازه می‌دهد تا تنظیمات بهینه برای هر یک از این متغیرها بدون الزام به رعایت یک رابطه هم‌زمان یا هم‌وابسته میان آن‌ها انجام شود. به این ترتیب، سیاست‌گذار می‌تواند با انعطاف بیشتری نسبت به کنترل هزینه‌ها یا افزایش درآمدهای مالیاتی اقدام کند. در مقابل، رویکرد دوم بر پیوند ذاتی و پویای

¹ No-Ponzi Game Condition

بین T و G تأکید دارد. در این حالت، به جای استفاده از کسری مالی به عنوان نماینده رابطه بین این دو متغیر، هر دو مستقیماً در معادله حالت مدل گنجانده می‌شوند. این رویکرد امکان تحلیل هم‌زمان و بهینه‌سازی مشترک مخارج دولت و درآمدهای مالیاتی را فراهم می‌سازد، به گونه‌ای که بتوان تعادل مناسبی میان آن‌ها برقرار کرده و سیاست‌های مالی پایدارتری طراحی نمود.

۴.۱. استقلال متغیرهای کنترل سیاستگذار مالی $T(t)$ و $G(t)$ در مدل.

در این بخش متغیرهای کنترل سیاستگذار مالی (دولت) که شامل مخارج دولت و درآمد مالیاتی می‌باشد به صورت مستقل در معادله حالت قرار می‌گیرند.

معادله وضعیت (حالت) بدهی عمومی دولت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{d} = rd(t) + G(t) - T(t) - m(t), \quad d(0) = d_0. \quad (۴)$$

سیاستگذار مالی، که به عنوان خزانه‌داری کل نیز شناخته می‌شود، دارای یک تابع زیان بین‌زمانی است، که مشروط به پویایی مخارج دولت، درآمد مالیاتی، انتشار پول، و بدهی عمومی است.

$$L_{G,T} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ (G(t) - \bar{G})^2 + (T(t) - \bar{T})^2 + \varphi(m(t) - \bar{m})^2 + \tau(d(t) - \bar{d})^2 \} e^{-\rho t} dt. \quad (۵)$$

مقامات مالی به منظور کمینه‌سازی تابع زیان بین‌زمانی، از استراتژی‌هایی بهره می‌برند که هدف اصلی آن‌ها کنترل کسری‌های اولیه بودجه است. این استراتژی‌ها مبتنی بر مجموعه‌ای از ملاحظات کلیدی هستند که چارچوب تصمیم‌گیری دولت را شکل می‌دهند:

۱. **محدودیت پویای بودجه دولت:** این محدودیت، که با معادله‌ی (۴) نمایش داده می‌شود، سقف کسری قابل تحمل در هر بازه زمانی را مشخص می‌کند و از طریق آن، پایداری جریان‌های مالی دولت در طول زمان تضمین می‌شود.
۲. **شرایط عرضی:**^۱ شرایطی که با معادله‌ی (۳) نشان داده شده و برای اطمینان از پایداری بلندمدت اقتصادی و جلوگیری از انباشت بی‌رویه بدهی ضروری است.
۳. **موجودی اولیه بدهی عمومی:** این مقدار، که با $d(0)$ نمایش داده می‌شود، نشان‌دهنده سطح بدهی انباشته دولت در ابتدای دوره تحلیل است و نقطه شروع فرآیند بهینه‌سازی را تعیین می‌کند.

در این چارچوب، متغیرهای $\bar{d}$ و $\bar{T}$ ، $\bar{G}$ ، $\bar{m}$ به ترتیب نمایانگر مقادیر هدف پایه پولی، مخارج دولت، درآمد مالیاتی، و رشد بدهی دولت هستند. این مقادیر که اغلب به عنوان "نقاط سعادت"^۲ شناخته می‌شوند، معرف مقادیر بهینه‌ای هستند که نظام نهادی و چارچوب‌های سیاست‌گذاری برای دستیابی به تعادل اقتصادی در نظر می‌گیرند. علاوه بر این، نرخ ترجیح زمانی ذهنی سیاست‌گذار،

¹ Transversality Condition

² bliss points

که با ρ نشان داده می‌شود، در وزن‌دهی به زیان‌های فعلی در مقابل زیان‌های آتی نقشی اساسی دارد و بازتاب‌دهنده‌ی دیدگاه سیاست‌گذار نسبت به توازن بین هزینه‌های کوتاه‌مدت و بلندمدت است. همچنین، پارامترهای φ و τ به ترتیب وزن‌های نسبی سیاست مالی برای انتشار پول (به‌وسیله بانک مرکزی) و مدیریت بدهی عمومی را مشخص می‌کنند. این ضرایب، نقش تصمیم‌گیری مالی را در تخصیص ابزارهای مختلف سیاست‌گذاری مشخص می‌سازند.

در سیاست پولی، بانک مرکزی نرخ رشد پایه پولی را به‌گونه‌ای تنظیم می‌کند که تابع زیان خود را که بیانگر اهداف و اولویت‌هایش می‌باشد به حداقل برسد. این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_m = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ (m(t) - \bar{m})^2 + \eta(T(t) - \bar{T})^2 + \eta(G(t) - \bar{G})^2 + \theta(d(t) - \bar{d})^2 \} e^{-\rho t} dt. \quad (6)$$

اختلاف بین میزان منابع مالی موردنیاز برای تأمین مخارج دولت، یعنی مجموع هزینه‌های غیربهره‌ای و پرداخت بهره بدهی، $r\bar{d} + \bar{G} - \bar{T}$ و میزان پایه پولی مورد هدف سیاست پولی ($\bar{m}$)، نقش تعیین‌کننده‌ای در روند انباشت بدهی عمومی ایفا می‌کند. این شکاف بیانگر درجه‌ی ناهماهنگی بین اهداف مالی و پولی است و هرچه این اختلاف بیشتر باشد، نشان از شدت بیشتر تنش میان این دو سیاست دارد. در نتیجه، چنین ناهماهنگی‌هایی می‌توانند به افزایش بدهی دولت در بلندمدت منجر شوند.

علاوه بر شکاف منابع مالی و تسهیلات پولی، اختلاف میان نرخ ترجیح زمانی سیاست‌گذار (ρ) و نرخ بهره خالص (r) عامل مهمی در انباشت بدهی عمومی است. وقتی $\rho \geq r$ باشد و بدهی مستقیماً در تابع هدف لحاظ نشود، منافع کوتاه‌مدت استقراض بر هزینه‌های واقعی آن غلبه کرده و دولت به افزایش بی‌رویه بدهی سوق می‌یابد. در این چارچوب، وزن‌های τ و θ در تابع زیان نشان‌دهنده نگرش مقامات مالی و پولی به تثبیت بدهی‌اند، θ بالا همراه τ پایین بیانگر گرایش دولت به تأمین مالی کسری از منابع پولی به‌جای سیاست مالی انقباضی است که استقلال سیاست پولی را تضعیف و اتکای مالی به انتشار پول را افزایش می‌دهد. در مقابل، مقادیر پایین هر دو پارامتر نشانه ضعف اراده نهادی برای پذیرش هزینه‌های تثبیت بدهی و انتقال بار آن به نسل‌های آینده است.

۴.۱.۱ حل بازی دیفرانسیلی

در این بخش مدلی بررسی می‌شود که در آن دولت به‌عنوان سیاست‌گذار مالی و بانک مرکزی به‌عنوان سیاست‌گذار پولی به‌طور مستقل و بدون همکاری مستقیم عمل می‌کنند. این چارچوب که «حلقه باز» نام دارد، بر تصمیمات از پیش تعهد شده و مسیرهای ثابت سیاست‌گذاری شده استوار است. حال با در نظر گرفتن این فرضیات، به بررسی تعادل برای این نوع اقتصاد می‌پردازیم. اولاً سیاست‌گذار پولی، تابع هدف خود (معادله ۶) را با توجه به محدودیت بودجه (معادله ۴) به حداقل می‌رساند. تابع همیلتونی^۱ برای این معادله به صورت زیر بیان می‌شود.

$$H_m = \frac{1}{2} \left[\eta(G(t) - \bar{G})^2 + \eta(T(t) - \bar{T})^2 + (m(t) - \bar{m})^2 + \theta(d(t) - \bar{d})^2 \right] e^{-\rho t} + \lambda_1(t)[rd(t) + G(t) - T(t) - m(t)]. \quad (7)$$

¹ Hamiltonian function

در این معادلات، $\lambda_1(t)$ به عنوان متغیر کمکی همیلتونی تعریف می شود. با فرض $e^{\rho t} \lambda_1(t) = \mu_1(t)$ ، شرایط مرتبه اول این مسئله بهینه سازی پویا برابر است با

$$\frac{\partial H}{\partial m} = 0 \rightarrow e^{-\rho t}(m(t) - \bar{m}) - \lambda_1(t) = 0 \rightarrow m(t) = \bar{m} + \mu_1(t). \quad (8)$$

بر اساس قضیه اوایلر-لاگرانژ^۱ (انجوردا، ۲۰۰۵)، لزوماً یک مسیر $\lambda_1^*(t)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل صدق می کند.

$$\dot{\lambda}_1(t) = \rho \lambda_1(t) - \frac{\partial H}{\partial d} \rightarrow \dot{\lambda}_1(t) = \rho \lambda_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d})e^{-\rho t} - r \lambda_1(t).$$

با ضرب دو طرف معادله فوق در $\lambda_1(t)$ ، و جایگزینی $e^{\rho t} \lambda_1(t) = \mu_1(t)$ ، معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را به دست می آوریم. $\mu_1(t)$ را می توان به عنوان هزینه فرصت یا قیمت سایه تفسیر کرد که نشان دهنده هزینه اقتصادی ناشی از انحراف از سطوح مطلوب مخارج و درآمد است.

$$\dot{\mu}_1(t) = (\rho - r)\mu_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}). \quad (9)$$

معادلات ارائه شده شرط انتقال را برآورده می سازند. این بدان معناست که نتایج حاصل از این معادلات مستقل از مسیر محاسباتی یا سیستم مختصات انتخاب شده بوده و در همه حالات یکسان خواهد بود. این ویژگی استقلال معادلات از سیستم مختصات را نشان می دهد و امکان تعمیم نتایج به تمامی شرایط ممکن (با فرض ساختار اطلاعاتی حلقه باز در بازی) را فراهم می آورد. از سوی دیگر، سیاستگذار مالی (دولت) با هدف حداقل سازی تابع زیان خود، در چارچوب محدودیت های بودجه ای (محدودیت ۴) و تابع هدف (تابع ۵) عمل می نماید. بر این اساس، مقدار همیلتونی برای سیاستگذار مالی توسط معادله زیر بیان می شود :

$$H_{G,T} = \frac{1}{2}[(G(t) - \bar{G})^2 + (T(t) - \bar{T})^2 + \varphi(m(t) - \bar{m})^2 + \tau(d(t) - \bar{d})^2]e^{-\rho t} + \lambda_2(t)[rd(t) + G(t) - T(t) - m(t)]. \quad (10)$$

متغیر $\lambda_2(t)$ به عنوان متغیر کمکی همیلتونی در تابع همیلتونی سیاست گذار مالی (دولت)، در این معادله بیان شده است. با فرض $e^{\rho t} \lambda_2(t) = \mu_2(t)$ ، در این حالت شرط بهینه مرتبه اول و محدودیت مینیمم سازی به صورت زیر فرموله می شود.

$$\frac{\partial H_{G,T}}{\partial G} = 0 \rightarrow (G(t) - \bar{G})e^{-\rho t} + \lambda_2(t) = 0 \rightarrow G(t) = \bar{G} - \mu_2(t). \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_{G,T}}{\partial T} = 0 \rightarrow (T(t) - \bar{T})e^{-\rho t} - \lambda_2(t) = 0 \rightarrow T(t) = \bar{T} + \mu_2(t). \quad (12)$$

¹ Euler-Lagrange

با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) می‌توان نوشت:

$$G(t) - T(t) = -2\mu_2(t) + \bar{G} - \bar{T} \quad (۱۳)$$

که نشان‌دهنده کسری مالی دولت است.

مطابق معادلات (۱۰) تا (۱۲)، متغیرهای مخارج دولتی ($G(t)$) و درآمد مالیاتی ($T(t)$) در حالت تعادل، از یکدیگر مستقل هستند. این بدان معناست که تغییرات در هر یک از این متغیرها، لزوماً به تغییرات در متغیر دیگر منجر نمی‌شود. با این حال، این استقلال به معنای عدم ارتباط بین این دو متغیر نیست. در واقع، هر دو متغیر به عنوان اجزای یک سیستم اقتصادی، به طور مشترک در تعیین تعادل کلی اقتصاد از جمله تثبیت بدهی عمومی نقش دارند.

با توجه به قضیه اوپلر - لاگرانژ (انجوردا ۲۰۰۵)

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) &= \rho \lambda_2(t) - \frac{\partial H_{G,T}}{\partial d} \\ \rightarrow \dot{\lambda}_2(t) &= \rho \lambda_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d})e^{-\rho t} - r \lambda_2(t) . \\ \rightarrow \dot{\lambda}_2(t)e^{\rho t} &= \rho \lambda_2(t)e^{\rho t} - \tau(d(t) - \bar{d}) - re^{\rho t} \lambda_2(t) . \end{aligned}$$

با فرض $e^{\rho t} \lambda_2(t) = \mu_2(t)$ ، می‌توانیم معادله دیفرانسیل زیر را بنویسیم.

$$\dot{\mu}_2(t) = (\rho - r)\mu_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d}) . \quad (۱۴)$$

با جایگزین کردن $G(t)$ ، $T(t)$ و $m(t)$ در معادله (۴) دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی زیر را دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = rd(t) - 2\mu_2(t) - \mu_1(t) + \bar{G} - \bar{T} - \bar{m} \\ \dot{\mu}_1(t) = (\rho - r)\mu_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}) \\ \dot{\mu}_2(t) = (\rho - r)\mu_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d}) . \end{cases} \quad (۱۵)$$

گزاره ۴.۱: اگر $m^* \in U$ ، T^* ، G^* مجموعه‌ای از استراتژی‌های نش حلقه باز برای معادلات (۴)، (۵) و (۶) با $d(0) = d_0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1^*(t) = \mu_1^e$ ، $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_2^*(t) = \mu_2^e$ باشد، نتیجه می‌شود که یک مسیر برای بدهی $d^*(.)$ و متغیرهای کمکی هزینه $\mu_1^*(.)$ و $\mu_2^*(.)$ وجود دارد که دستگاه معادلات دیفرانسیل خطیر (۱۵) را برآورده می‌کنند.

حال باید دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۵) را حل کنیم. نمایش ماتریسی دستگاه به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \dot{\mu}_1(t) \\ \dot{\mu}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r & -1 & -2 \\ -\theta & \rho - r & 0 \\ -\tau & 0 & \rho - r \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G} - \bar{T} - \bar{m} \\ \theta \bar{d} \\ \tau \bar{d} \end{bmatrix}$$

ما از قضیه زیر برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کنیم (محمودی نیا و همکاران ۲۰۱۶).

قضیه ۴.۱: فرض کنید که ماتریس $A = SDS^{-1}$ بفرم A بوده و مقادیر ویژه آن d_1 و d_2 و $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ ، $d_1 < 0$ ، $\sigma(d_2) \subset \mathbb{C}^+$ جواب دستگاه معادله دیفرانسیل

$$\begin{pmatrix} \dot{d}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

با $\begin{pmatrix} d(0) \\ \mu(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$ بصورت زیر می‌باشد

$$\mu(t) = \alpha e^{d_1 t} [0 \ I] S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - [0 \ I] A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, d(t) = (d_0 + [I \ 0] A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}) e^{d_1 t} - [I \ 0] A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

که در آن μ_0 و α را می‌توان با استفاده از روابط زیر محاسبه کرد

$$\alpha = \frac{1}{s_{11}} (d_0 + [I \ 0] A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}), s_{11} = [I \ 0] S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_0 = \alpha [0 \ I] (S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix})$$

حال، با استفاده از قضیه ۴.۱، سطح تعادل بدهی عمومی، مخارج دولت، درآمد مالیاتی و پایه پولی را به شرح زیر تعیین می‌گردد.

$$d^e(t) = \left(d_0 + \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-2\bar{d}\tau}{\beta_1} \right) e^{\beta_2 t} - \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-2\bar{d}\tau}{\beta_1}$$

به طوری که مقادیر β_1 و β_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\beta_1 = r^2 - r\rho + \theta + 2\tau, \quad \beta_2 = \frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - 4r\rho + 4r^2 + 8r + 4\theta}}{2}$$

برای تعیین سطح تعادل پایه پولی در حالت پایدار ($m^e(t)$)، ابتدا تابع $\mu_1^e(t)$ را با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آوریم

$$\mu_1^e(t) = \alpha \frac{\theta}{\tau} e^{\beta_2 t} + \frac{\theta(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})}{\beta_1} + \frac{\theta\bar{d}(r^2-r\rho+2\tau)-2\theta\bar{d}\tau}{\beta_3} \quad (۱۶)$$

که در آن مقادیر α و β_3 به صورت زیر به دست می آیند

$$\alpha = -\frac{1}{2\tau + \theta} \tau (\beta_2 - r) \left(d_0 + \frac{(-\rho + r)(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m}) - \theta \bar{d} - 2\tau \bar{d}}{\beta_1} \right)$$

$$\beta_3 = r^3 - 2r^2\rho + r\rho^2 + 2r\tau + \theta r - 2\tau\rho - \rho\theta$$

در نتیجه، با استفاده از روابط (۸) و (۱۶) می توان رابطه تعادلی سیاستگذار پولی $(m^e(t))$ را نوشت:

$$m^e(t) = \bar{m} + \mu_1^e(t) .$$

علاوه بر این، سطوح تعادلی مخارج دولت و درآمد مالیاتی را می توان با استفاده از معادله زیر به دست آورد:

$$\mu_2^e(t) = \alpha e^{\beta_2 t} + \frac{\tau(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\beta_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2 - r\rho + \theta) - \theta \bar{d}\tau}{\beta_3} \quad (۱۷)$$

اکنون، با در نظر گرفتن معادلات (۱۱) و (۱۲) تابع تعادل برای مخارج دولت $G^e(t)$ و درآمد مالیاتی $T^e(t)$ بر اساس رابطه (۱۷) به دست می آید $G^e(t) = \bar{G} - \mu_2^e(t)$, $T^e(t) = \bar{T} + \mu_2^e(t)$,

همچنین وقتی $t \rightarrow \infty$ مقدار تعادل برای هریک از متغیر ها از روابط زیر محاسبه می شود.

$$\psi_d = -\frac{(-\rho + r)(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m}) - \theta \bar{d} - 2\tau \bar{d}}{\beta_1} .$$

$$\psi_G = \bar{G} - \left(\frac{\tau(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\beta_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2 - r\rho + \theta) - \theta \bar{d}\tau}{\beta_3} \right) .$$

$$\psi_T = \bar{T} + \left(\frac{\tau(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\beta_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2 - r\rho + \theta) - \theta \bar{d}\tau}{\beta_3} \right) .$$

$$\psi_m = \bar{m} + \left(\frac{\theta(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\beta_1} + \frac{\theta \bar{d}(r^2 - r\rho + 2\tau) - 2\theta \bar{d}\tau}{\beta_3} \right) .$$

$$\psi_{(G-T)} = -2 \left(\frac{\tau(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\beta_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2 - r\rho + \theta) - \theta \bar{d}\tau}{\beta_3} \right) + \bar{G} - \bar{T}$$

به ترتیب، ψ_d نشان دهنده نرخ پایدار بدهی عمومی، ψ_G نشان دهنده نرخ پایدار مخارج دولت، ψ_T نشان دهنده نرخ پایدار درآمد مالیاتی، ψ_m نشان دهنده نرخ پایه پولی و $\psi_{(G-T)}$ نشان دهنده نرخ پایدار کسری مالی است. همچنین β_2 سرعت همگرایی به سمت حالت پایداری یا تعادل می باشد.

۴.۲ متغیرهای کنترل سیاستگذار مالی $T(t)$ و $G(t)$ در مدل وابسته می باشند :

در این بخش، متغیرهای کنترلی سیاستگذار مالی (دولت)، که شامل مخارج دولت و درآمدهای مالیاتی می باشند، به طور وابسته در معادله حالت قرار می گیرند.

در رویکرد دوم، مخارج دولت و درآمد مالیاتی نه به طور جداگانه، بلکه در قالب متغیر مشترک «کسری مالی دولت» بررسی می شوند. این روش که بیانگر تعادل یا عدم تعادل میان درآمد و مخارج است، امکان ارزیابی یکپارچه اثر سیاستهای مالی بر بدهی عمومی را فراهم می کند. در نظر گرفتن وابستگی متقابل این دو متغیر، درک دقیق تر و جامع تری از سیاست گذاری مالی و آثار آن بر متغیرهای کلان ارائه می دهد. با توجه به شرایط و توضیحات ذکر شده در بخش ۴.۱، موردی را در نظر می گیریم که در آن وابستگی قطعی بین متغیرهای کنترلی مخارج دولت ($G(t)$) و درآمد مالیاتی ($T(t)$) وجود دارد. در این حالت، معادله حالت و توابع زیان بین زمانی برای سیاستگذار مالی و سیاستگذار پولی به طور زیر تعریف می شود.

$$\dot{d} = rd(t) + (G(t) - T(t)) - m(t). \quad d(0) = d_0 \quad (۱۸)$$

در این مدل همانطور که بیان گردید ($f(t) = G(t) - T(t)$) نشان دهنده کسری مالی دولت است. سیاستگذار مالی (دولت) تابع زیان بین زمانی زیر را دارد:

$$L_f = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ ((G(t) - \bar{G}) - (T(t) - \bar{T}))^2 + \varphi(m(t) - \bar{m})^2 + \tau(d(t) - \bar{d})^2 \} e^{-\rho t} dt. \quad (۱۹)$$

که خواهیم داشت:

$$L_f = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ (G(t) - \bar{G})^2 + (T(t) - \bar{T})^2 - 2(G(t) - \bar{G})(T(t) - \bar{T}) + \varphi(m(t) - \bar{m})^2 + \tau(d(t) - \bar{d})^2 \} e^{-\rho t} dt. \quad (۲۰)$$

پارامترهای τ و φ نشان می دهند که سیاستگذار مالی تا چه اندازه به انتشار پول و بدهی عمومی به عنوان ابزارهای سیاستی اهمیت می دهد. به عبارت دیگر، این ضرایب ترکیب بهینه سیاستی را از نظر سیاستگذار مالی تعیین می کنند.

بر اساس هدف دستیابی به ثبات بدهی عمومی، سیاستگذار مالی ترجیح می دهد مخارج دولت ($G(t)$) از یک سطح مشخص ($\bar{G}$) کمتر و درآمدهای مالیاتی ($T(t)$) از یک سطح مشخص ($\bar{T}$) بیشتر باشد. این وضعیت را می توان به عنوان نقطه بهینه ترجیحات سیاستگذار در نظر گرفت. با گنجاندن عبارت $(G(t) - \bar{G})(T(t) - \bar{T})$ در تابع زیان، سیاستگذار تشویق می شود تا به این نقطه نزدیک شود (با توجه به آنکه در تابع زیان $(G(t) - \bar{G})(T(t) - \bar{T}) < 0$)

سیاستگذار پولی رشد پول پایه را به گونه‌ای تنظیم کرده‌اند که تابع زیان زیر را به حداقل برساند:

$$L_m = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ (m(t) - \bar{m})^2 + \eta(G(t) - \bar{G}) - (T(t) - \bar{T}))^2 + \theta(d(t) - \bar{d})^2 \} e^{-\rho t} dt.$$

که بر این اساس رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$L_m = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ (m(t) - \bar{m})^2 + \eta(G(t) - \bar{G})^2 + \eta(T(t) - \bar{T})^2 - 2\eta(G(t) - \bar{G})(T(t) - \bar{T}) + \theta(d(t) - \bar{d})^2 \} e^{-\rho t} dt. \quad (21)$$

مشابه تابع زیان سیاستگذار مالی، پارامترهای η و θ نشان می‌دهند که سیاستگذار پولی تا چه اندازه به متغیرهای کنترلی سیاستگذار مالی (مخارج دولت و درآمد مالیاتی) و بدهی عمومی به عنوان ابزارهای سیاستی اهمیت می‌دهد. به عبارت دیگر، این ضرایب نیز ترکیب بهینه سیاستی را از نظر سیاستگذار پولی تعیین می‌کنند.

۴.۲.۱. حل بازی دیفرانسیلی

سیاست گذار پولی در حالی که به محدودیت بودجه (معادله ۱۸) پایبند است، به دنبال به حداقل رساندن تابع هدف خود نیز است (معادله ۲۱). تابع هامیلتونی برای این معادله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$H_m = \frac{1}{2} [(m(t) - \bar{m})^2 + \eta(G(t) - \bar{G})^2 + \eta(T(t) - \bar{T})^2 - 2\eta(G(t) - \bar{G})(T(t) - \bar{T}) + \theta(d(t) - \bar{d})^2] e^{-\rho t} + \lambda_1(t) [rd(t) + (G(t) - T(t)) - m(t)]. \quad (22)$$

اکنون برای شرایط مرتبه اول این مسئله بهینه سازی پویا با فرض $e^{\rho t} \lambda_1(t) = \mu_1(t)$ رابطه زیر را داریم:

$$\frac{\partial H_m}{\partial m} = 0 \rightarrow e^{-\rho t} (m(t) - \bar{m}) - \lambda_1(t) = 0 \rightarrow m(t) = \bar{m} + \mu_1(t). \quad (23)$$

بر اساس قضیه اوپلر-لاگرانژ (انجوردا ۲۰۰۵)، لزوماً یک مسیر $\lambda_1^*(t)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

$$\dot{\lambda}_1(t) = \rho \lambda_1(t) - \frac{\partial H}{\partial d} \rightarrow \dot{\lambda}_1(t) = \rho \lambda_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}) e^{-\rho t} - r \lambda_1(t).$$

مانند بخش ۴.۱.۱ با ضرب دو طرف معادله فوق در $\lambda_1(t)$ ، و جایگزینی $e^{\rho t} \lambda_1(t) = \mu_1(t)$ ، معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را به دست می‌آید:

$$\dot{\mu}_1(t) = (\rho - r) \mu_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}). \quad (24)$$

در مقابل، سیاستگذار مالی (دولت) نیز در پی به حداقل رساندن تابع هدف زیان خود عمل می‌کند، که به محدودیت بودجه (۱۸) و محدودیت سیاست مالی (۲۰) بستگی دارد. تابع همیلتونی برای این سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$H_f = \frac{1}{2}[(G(t) - \bar{G})^2 + (T(t) - \bar{T})^2 - 2(G(t) - \bar{G})(T(t) - \bar{T}) + \varphi(m(t) - \bar{m})^2 + \tau(d(t) - \bar{d})^2]e^{-\rho t} + \lambda_2(t)[rd(t) + (G(t) - T(t)) - m(t)] . \quad (25)$$

بنابراین، شرایط مرتبه اول برای سیاست گذار مالی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{\partial H_f}{\partial G} = 0 \rightarrow [(G(t) - \bar{G}) - (T(t) - \bar{T})]e^{-\rho t} + \lambda_2(t) = 0 \rightarrow G(t) - T(t) = \bar{G} - \bar{T} - \mu_2(t). \quad (26)$$

$$\frac{\partial H_f}{\partial T} = 0 \rightarrow [(T(t) - \bar{T}) - (G(t) - \bar{G})]e^{-\rho t} - \lambda_2(t) = 0 \rightarrow G(t) - T(t) = \bar{G} - \bar{T} - \mu_2(t). \quad (27)$$

بنابراین شرط مرتبه اول برای سیاست گذار مالی را می‌توان بر اساس روابط (26) و (27) اینگونه بیان کرد:

$$G(t) - T(t) = \bar{G} - \bar{T} - \mu_2(t). \quad (28)$$

این معادله تعادل بین مخارج کل دولت $(G(t))$ و درآمد مالیاتی $(T(t))$ را با سطح مخارج مطلوب دولت $(\bar{G})$ و سطح مطلوب درآمد مالیاتی $(\bar{T})$ نشان می‌دهد. تفاوت بین این دو متغیر توسط ضریب $\mu_2(t)$ تعدیل می‌شود. به عبارت دیگر، شرط اول بیان می‌کند که سیاستگذار مالی تلاش می‌کند تا تفاوت بین مخارج واقعی و هدفمند و همچنین تفاوت بین درآمدهای واقعی و هدفمند را با هم متعادل کند. این تعادل به گونه‌ای تنظیم شده است که هزینه فرصت ناشی از این انحراف‌ها نیز در نظر گرفته شود.

با توجه به قضیه اوایلر-لاگرانژ (انجوردا - ۲۰۰۵) می‌توان معادلات زیر را به دست آورد

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) &= \rho \lambda_2(t) - \frac{\partial H_f}{\partial d} . \\ \rightarrow \dot{\lambda}_2(t) &= \rho \lambda_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d})e^{-\rho t} - r \lambda_2(t) . \\ \rightarrow \dot{\lambda}_2(t)e^{\rho t} &= \rho \lambda_2(t)e^{\rho t} - \tau(d(t) - \bar{d}) - r e^{\rho t} \lambda_2(t) . \end{aligned}$$

با فرض $e^{\rho t} \lambda_2(t) = \mu_2(t)$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر بدست می‌آید

$$\dot{\mu}_2(t) = (\rho - r)\mu_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d}). \quad (29)$$

با جایگزین کردن توابع $G(t)$ ، $T(t)$ و $m(t)$ در معادله حالت (۱۸) و با در نظر گرفتن معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲۴) و (۲۹) دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی زیر را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = rd(t) - \mu_2(t) - \mu_1(t) + \bar{G} - \bar{T} - \bar{m} \\ \dot{\mu}_1(t) = (\rho - r)\mu_1(t) - \theta(d(t) - \bar{d}) \\ \dot{\mu}_2(t) = (\rho - r)\mu_2(t) - \tau(d(t) - \bar{d}). \end{cases} \quad (30)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (۳۰) را به فرم ماتریسی زیر تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \dot{\mu}_1(t) \\ \dot{\mu}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r & -1 & -1 \\ -\theta & \rho - r & 0 \\ -\tau & 0 & \rho - r \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G} - \bar{T} - \bar{m} \\ \theta \bar{d} \\ \tau \bar{d} \end{bmatrix}$$

با استفاده از گزاره ۴.۱ و قضیه ۴.۱، دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول (۳۰) را حل کرده تا سطح تعادل بدهی عمومی، مخارج دولت، درآمد مالیاتی و پایه پولی را بدست آوریم.

$$d^e(t) = \left(d_0 + \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-\tau\bar{d}}{\gamma_1} \right) e^{\gamma_2 t} - \frac{(-\rho+r)(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})-\theta\bar{d}-\tau\bar{d}}{\gamma_1}$$

به طوری که مقادیر γ_1 و γ_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\gamma_1 = r^2 - r\rho + \tau + \theta, \quad \gamma_2 = \frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - 4r\rho + 4r^2 + 4\tau + 4\theta}}{2}$$

مانند بخش قبل برای تعیین سطح تعادل پایه پولی در حالت پایدار، ابتدا تابع $\mu_1^e(t)$ را با استفاده از معادله زیر بدست می‌آوریم

$$\mu_1^e(t) = \alpha \frac{\theta}{\tau} e^{\beta_2 t} + \frac{\theta(\bar{G}-\bar{T}-\bar{m})}{\gamma_1} + \frac{\theta\bar{d}(r^2-r\rho+\tau)-\theta\bar{d}\tau}{\gamma_3} \quad (31)$$

که در آن مقادیر α و γ_3 به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\alpha = -\frac{1}{\tau + \theta} \tau (\gamma_2 - r) \left(d_0 + \frac{(-\rho + r)(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m}) - \theta \bar{d} - \tau \bar{d}}{\gamma_1} \right)$$

$$\gamma_3 = r^3 - 2r^2\rho + r\rho^2 + r\tau + \theta r - \tau\rho - \rho\theta$$

با استفاده از روابط (۲۳) و (۳۱) می توان رابطه تعادلی سیاستگذار پولی ($m^e(t)$) را بدست آورد
 $(m^e(t) = \bar{m} + \mu_1^e(t))$

علاوه بر این، سطوح تعادلی مخارج دولت و درآمد مالیاتی را می توان با استفاده از معادلات زیر تعیین کرد.

$$\mu_2^e(t) = \alpha e^{\beta_2 t} + \frac{\tau(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\gamma_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2 - r\rho + \theta) - \theta \bar{d}\tau}{\gamma_3} \quad (32)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۲۸)، رابطه تعادلی کسری مالی که با رابطه زیر محاسبه می شود:

$$f^e(t) = (G^e(t) - T^e(t)) = \bar{G} - \bar{T} - \mu_2(t)$$

همچنین وقتی $t \rightarrow \infty$ نرخ تعادل برای هریک از متغیرهای تعادلی از روابط زیر محاسبه می شود.

$$\phi_d = -\frac{(-\rho + r)(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m}) - \theta \bar{d} - \tau \bar{d}}{\gamma_1}$$

$$\phi_m = \bar{m} + \left(\frac{\theta(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\gamma_1} + \frac{\theta \bar{d}(r^2 - r\rho + \tau) - \theta \bar{d}\tau}{\gamma_3} \right)$$

$$\phi_f = -\left(\frac{\tau(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\gamma_1} + \frac{\bar{d}\tau(r^2 - r\rho + \theta) - \theta \bar{d}\tau}{\gamma_3} \right) + \bar{G} - \bar{T}$$

در روابط بالا متغیر ϕ_d بیانگر سطح تعادلی است که بدهی عمومی در درازمدت به آن میل می کند. به طور مشابه، ϕ_f و ϕ_m نیز به ترتیب سطوح تعادلی پایه پولی و کسری مالی را نشان می دهند. پارامتر γ_2 نیز سرعت حرکت اقتصاد به سمت این سطوح تعادلی را مشخص می کند. هرچه مقدار γ_2 بزرگتر باشد، متغیرهای کنترل سریع تر به حالت پایدار خود می رسد.

۴. شبیه سازی عددی و تحلیل نتایج

در این بخش نتایج شبیه سازی عددی مدل غیرهمکارانه بین دولت و بانک مرکزی ارائه می شود. این شبیه سازی با پارامترهای کالبره شده برای اقتصاد ایران و بر اساس مدل های بخش های ۴.۱ و ۴.۲ انجام شده و مسیرهای تعادلی با داده های واقعی توصیف می گردد. در تحلیل، فرض می شود هر دو سیاست گذار وزن یکسانی به بدهی عمومی می دهند (محمودی نیا و همکاران، ۲۰۱۶) و مقادیر هدف متغیرهای کنترلی ($\bar{d}$ ، $\bar{G}$ ، $\bar{m}$ و $\bar{T}$) از میانگین داده های ۲۰ ساله (۱۳۷۷-۱۳۹۷) بانک مرکزی ایران استخراج شده

است، در حالی که سطح اولیه بدهی عمومی بالاتر از مقدار هدف در نظر گرفته می‌شود. برای تعیین نرخ ذهنی ترجیح زمانی (ρ) در ایران نیز از مطالعات اسلاملوییان و استادزاد (۲۰۱۴) بهره گرفته شده است.

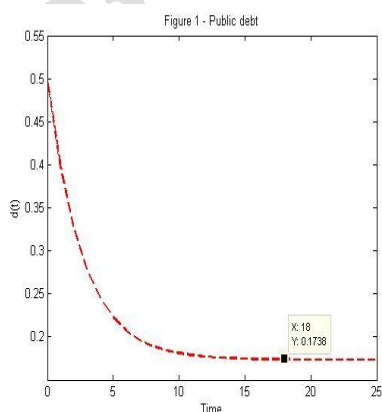
جدول شماره ۱: مقادیر پارامترهای مورد استفاده در مدل.

$\bar{G}$	φ	d_0	$\bar{d}$	$\bar{m}$	$\bar{T}$	r	θ	η	ρ	τ
۰.۱۹	۰.۰۵	۰.۵	۰.۲	۰.۱	۰.۱۶	-۰.۰۳	۰.۰۵	۰.۰۵	۰.۰۲۳	۰.۰۵

منبع: محاسبات نگارندگان بر اساس داده‌های بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران و الگوبرداری از اسلاملوییان و استادزاد (۲۰۱۴)، محمودی نیا و همکاران (۲۰۱۶)، انجوردا .

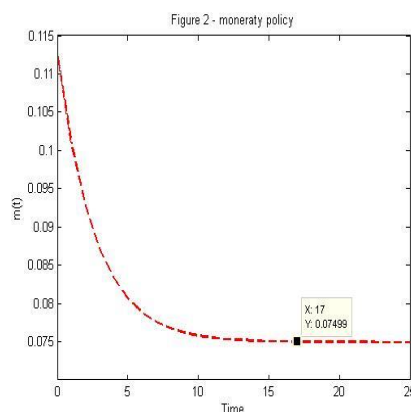
یافته‌های به‌دست‌آمده از طریق شبیه‌سازی عددی غیرهمکارانه در نمودارهای ۱ تا ۵ نشان می‌دهد زمانی که دو متغیر کنترل سیاست‌گذار مالی (درآمد مالیاتی و مخارج دولت) به‌طور مستقل در توابع زیان (۵) و (۶) گنجانده شده‌اند سطح نرخ بدهی عمومی تعادلی (پایدار) ۰.۱۷۳ است و سرعت (نرخ) همگرایی به سمت تعادل ۰.۳۷۸ است. علاوه بر این، در حالت پایدار، مخارج دولت، درآمد مالیاتی و پایه پولی به ترتیب درنرخ‌های ۰.۲۱۵، ۰.۱۳۵ و ۰.۰۷۵ به تعادل می‌رسند، و کسری مالی دولت (تفاوت بین مخارج دولت و درآمد مالیاتی) در ۰.۰۸ ثابت می‌ماند. توابع تعادل به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی عددی در حالت غیرهمکارانه با دو متغیر کنترلی مستقل سیاست‌گذار مالی ($G(t)$ و $T(t)$) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}d^e(t) &= (0.326571)e^{(-0.378015t)} + 0.173828. \\m^e(t) &= (0.037884)e^{(-0.378015t)} + 0.074932. \\G^e(t) &= (-0.037884)e^{(-0.378015t)} + 0.215067. \\T^e(t) &= (0.037884)e^{(-0.378015t)} + 0.134932. \\G^e(t) - T^e(t) &= (-0.075768)e^{(-0.378015t)} + 0.080.\end{aligned}$$



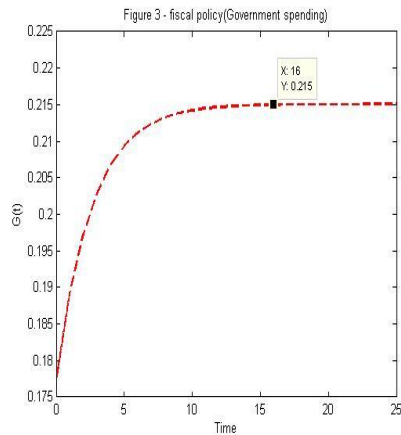
نمودار ۱: نمودار تابع تعادلی بدهی عمومی

(منبع: یافته‌های پژوهش)



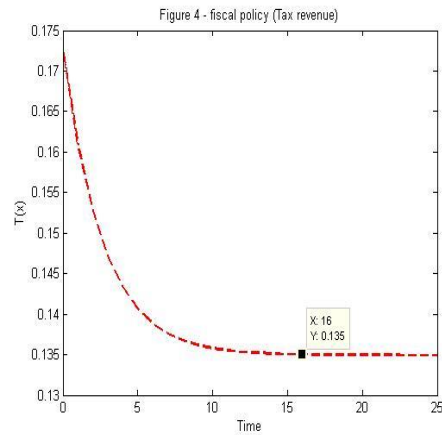
نمودار ۲: نمودار تابع تعادلی پایه پولی

(منبع: یافته‌های پژوهش)



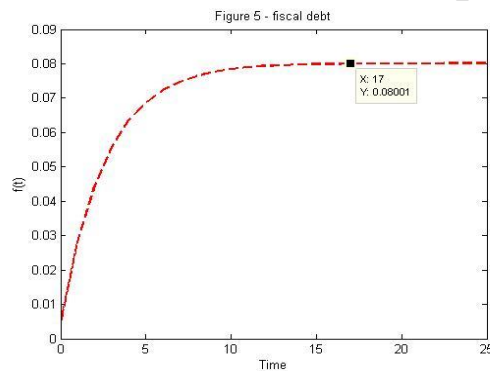
نمودار ۳: نمودار تابع تعادلی مخارج دولت

(منبع: یافته های پژوهش)



نمودار ۴: نمودار تابع تعادلی درآمد مالیاتی

(منبع: یافته های پژوهش)



نمودار ۵: نمودار تابع تعادلی کسری مالی

(منبع: یافته های پژوهش)

نمودار ۱ مسیر تعادلی بدهی عمومی را نشان می دهد که از سال هجدهم به بعد به سطح تعادلی ۰.۱۷۴ همگرا می شود. **نمودار ۲** مربوط به پایه پولی است که به عنوان ابزار سیاست پولی شناخته می شود و از سال هفدهم به مقدار تعادلی ۰.۰۷۵ می رسد. **نمودار ۳** مسیر مخارج دولت را ترسیم می کند که از سال شانزدهم در سطح پایدار ۰.۲۱۵ تثبیت می شود. **نمودار ۴** مسیر تعادلی درآمدهای مالیاتی را نمایش می دهد که از سال شانزدهم در سطح ۰.۱۳۵ قرار می گیرد. نهایتاً، **نمودار ۵** روند کسری مالی دولت (تفاضل مخارج دولت و درآمدهای مالیاتی) را نشان می دهد که از سال هفدهم به سطح تعادلی ۰.۰۸ همگرا می شود.

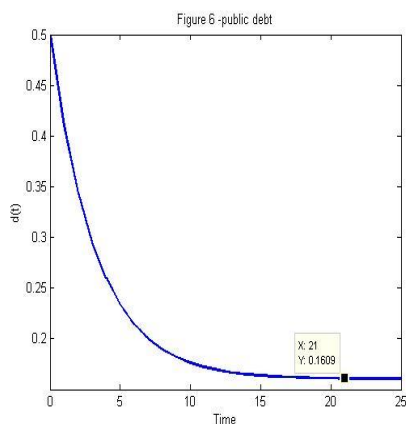
در رویکرد دوم (بخش ۴.۲)، فرض شده است که دو متغیر کنترلی سیاست گذار مالی، یعنی مخارج دولت و درآمد مالیاتی، به صورت یک متغیر ترکیبی به نام "کسری مالی" در تابع زیان گنجانده شده اند (روابط ۲۰ و ۲۱). این مدل به ما امکان می دهد تا اثر ترکیبی سیاست های مالی را بر پویایی بدهی عمومی ارزیابی کنیم. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که در وضعیت تعادلی، بدهی عمومی در

سطح ۰.۱۶۰ تثبیت می‌شود، در حالی که نرخ همگرایی به تعادل ۰.۳۰۷ شده است. همچنین، پایه پولی در سطح ۰.۰۶۲ و کسری مالی دولت در مقدار پایدار ۰.۰۶۷ قرار می‌گیرد. توابع تعادل به دست آمده از شبیه‌سازی عددی در حالت غیرهمکارانه با دو متغیر کنترلی وابسته سیاست گذار مالی $(T(t) \text{ و } G(t))$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}d^e(t) &= (0.339649)e^{(-0.307439t)} + 0.160350. \\m^e(t) &= (0.037884)e^{(-0.307439t)} + 0.062594. \\f^e(t) = G^e(t) - T^e(t) &= (-0.047116)e^{(-0.307439t)} + 0.067405.\end{aligned}$$

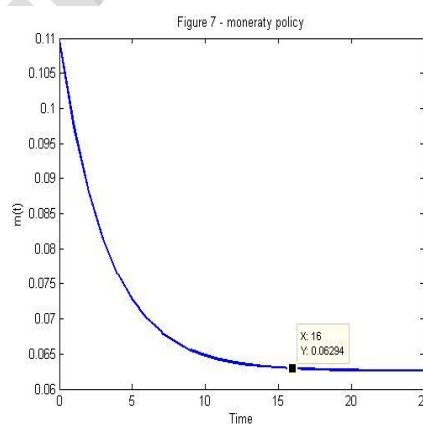
- $d^e(t)$ نشان‌دهنده مسیر تعادلی بدهی عمومی در طول زمان است.
- $m^e(t)$ مسیر تعادلی پایه پولی را مشخص می‌کند.
- تفاوت $f^e(t) = G^e(t) - T^e(t)$ ، کسری مالی دولت (تفاضل مخارج از درآمد مالیاتی) است.

ضریب نمایی $e^{(-0.307439t)}$ بیانگر سرعت همگرایی به تعادل در طول زمان است، به گونه‌ای که متغیرها به ترتیب به سطوح تعادلی ۰.۱۶۰، ۰.۰۶۲ و ۰.۰۶۷ میل می‌کنند. این مدل نشان می‌دهد که سیستم اقتصادی با نرخ همگرایی تقریباً ۰.۳۰۷۴۳۹ به وضعیت پایدار نزدیک می‌شود.



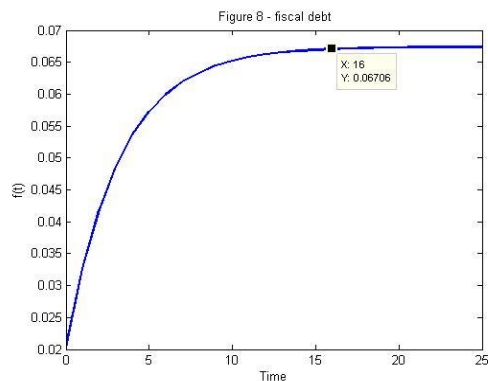
نمودار ۶: نمودار تابع تعادلی بدهی عمومی

(منبع: یافته‌های پژوهش)



نمودار ۷: نمودار تابع تعادلی پایه پولی

(منبع: یافته‌های پژوهش)

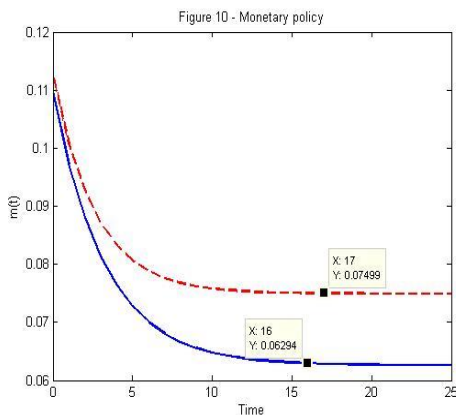


نمودار ۸: نمودار تابع تعادلی کسری مالی

(منبع: یافته های پژوهش)

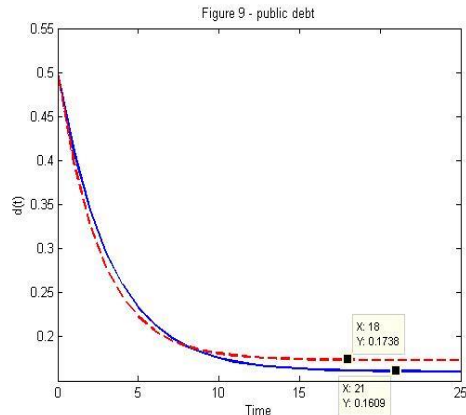
نمودار ۶ تابع تعادل بدهی عمومی است که از سال ۲۱ ام به نرخ تعادل ۰.۱۶۰ می‌رسد به طور مشابه، نمودار ۷، تابع تعادل سیاست پولی (عرضه پول) را نشان می‌دهد که از سال ۱۶ ام به بعد به نرخ تعادل ۰.۰۶۲ می‌رسد. نمودار ۸ کسری مالی دولت (تفاوت بین مخارج دولت و درآمد مالیاتی) را نشان می‌دهد که از سال ۱۶ ام به نرخ تعادل ۰.۰۶۷ می‌رسد.

یافته‌های شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که در حالت غیرهمکارانه، وقتی درآمد مالیاتی و مخارج دولت به صورت مستقل از هم در مدل وارد می‌شوند، بدهی عمومی در سطح تعادلی ۰.۱۷۳، کسری مالی در ۰.۰۸ و پایه پول در ۰.۷۵ تثبیت می‌گردد. اما در حالتی که این دو متغیر با در نظر گرفتن وابستگی متقابل آن‌ها مدل‌سازی شوند، مقادیر تعادلی آن‌ها به ترتیب به ۰.۱۶۰، ۰.۰۶۷ و ۰.۰۶۲ کاهش می‌یابد. این تفاوت‌ها حاکی از آن است که لحاظ کردن تعامل درون‌زای میان اجزای سیاست مالی نه تنها پایداری بدهی را تقویت می‌کند، بلکه موجب کاهش نیاز به افزایش پایه پولی و بهبود وضعیت مالی دولت می‌شود.



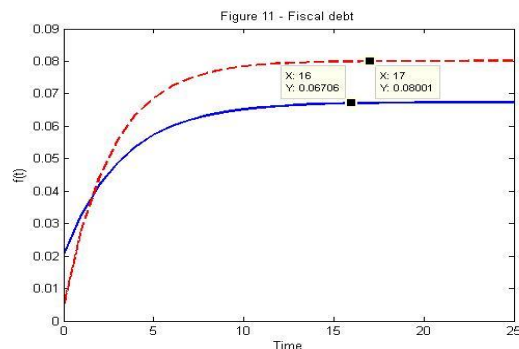
نمودار ۹: مقایسه نمودارهای تعادلی بدهی عمومی

(منبع: یافته های پژوهش)



نمودار ۱۰: مقایسه نمودارهای تعادلی پایه پولی

(منبع: یافته های پژوهش)



نمودار ۱۱: مقایسه نمودارهای تعادلی کسری مالی

(منبع: یافته های پژوهش)

۵،۱ . تحلیل حساسیت مقادیر تعادلی در حالت استقلال متغیرهای مالی دولت :

به منظور بررسی میزان پایداری و استحکام نتایج به دست آمده از مدل، تحلیل حساسیت نسبت به دو پارامتر ساختاری مهم انجام شده است. **نرخ بهره واقعی (r)** که نشان دهنده هزینه فرصت تأمین مالی برای دولت است، و **وزن بدهی (τ)** در تابع زیان سیاست گذار مالی که میزان حساسیت دولت به انباشت بدهی را بازتاب می دهد، این تحلیل کمک می کند تا تأثیر تغییرات در این پارامترها بر مقادیر تعادلی متغیرهای کلیدی مدل از جمله بدهی عمومی، پایه پولی و کسری مالی بررسی شود. در جداول زیر، ابتدا مشتق های تحلیلی مقادیر تعادلی نسبت به این پارامترها ارائه شده، سپس با استفاده از داده های واقعی کالیبره شده، مقادیر عددی این حساسیت ها محاسبه و در نهایت تفسیر اقتصادی هر مورد بیان شده است. این نتایج درک دقیق تری از رفتار درون زای مدل و نحوه واکنش آن به تغییرات ساختاری فراهم می سازد.

جدول شماره ۲ - نتایج تحلیل حساسیت متغیرهای حالت تعادلی نسبت به نرخ بهره r

متغیر	مشتق توابع ($\frac{\partial \psi}{\partial r}$)	مقادیر عددی	تفسیر
ψ_d (بدهی عمومی)	$\frac{-\bar{G} + \bar{T} + \bar{m}}{\beta_1}$	۰٫۴۶۲	مقدار مثبت نشان می دهد که افزایش نرخ بهره بدهی تعادلی را افزایش می دهد .
ψ_G (مخارج دولت)	$\frac{\bar{d} \cdot \tau \cdot (-2r + \rho)}{\beta_3}$	-۰٫۱۰۳	در نرخ های بهره بالا، دولت به دلیل فشار بیشتر برای بازپرداخت بدهی ها، تمایل کمتری به گسترش هزینه های خود دارد.
ψ_T (درآمد مالیاتی)	$\frac{\bar{d} \cdot \tau \cdot (2r - \rho)}{\beta_3}$	۰٫۱۰۳	افزایش نرخ بهره باعث افزایش فشار مالیاتی برای متعادل سازی بودجه می شود.

ψ_m (انتشار پول)	$\frac{\bar{d} \cdot \theta \cdot (2r - \rho)}{\beta_3}$	۰,۱۰۳	پایه پولی در واکنش به افزایش فشارهای تسلط مالی، رشد می‌کند.
ψ_{G-T} (کسری بودجه)	$\frac{2\bar{d} \cdot \tau \cdot (-2r + \rho)}{\beta_3}$	-۰,۲۰۶	افزایش نرخ بهره در حالت تعادلی موجب کاهش کسری بودجه می‌شود.

منبع: یافته‌های پژوهش

جدول شماره ۳-: نتایج تحلیل حساسیت متغیرهای حالت تعادلی نسبت به وزن بدهی τ

متغیر	مشتق توابع ($\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$)	مقادیر عددی	تفسیر
ψ_d (بدهی عمومی)	$\frac{2\bar{d}}{\beta_1}$	۲,۶۳۸	افزایش τ باعث افزایش قوی تعادلی بدهی عمومی می‌شود.
ψ_G (مخارج دولت)	$\frac{\beta_1 \bar{d} r(r - \rho) + \beta_3(-\bar{G} + \bar{T} + \bar{m})}{\beta_1 \beta_3}$	۰,۴۲۲	افزایش τ منجر به افزایش تعادلی مخارج دولت می‌شود.
ψ_T (درآمد مالیاتی)	$\frac{\beta_1 \bar{d} r(r - \rho) + \beta_3(\bar{G} - \bar{T} - \bar{m})}{\beta_1 \beta_3}$	-۰,۵۰۱	افزایش τ منجر به کاهش تعادلی درآمدهای مالیاتی می‌شود.
ψ_m (انتشار پول)	0	۰,۰۰۰	تغییر τ اثری بر پایه پولی ندارد (m)
ψ_{G-T} (کسری بودجه)	$\frac{[\beta_1 \bar{d} r(r - \rho) + \beta_3(-\bar{G} + \bar{T} + \bar{m})] \times 2}{\beta_1 \beta_3}$ منبع: یافته‌های پژوهش	۰,۸۴۴	افزایش τ موجب افزایش کسری بودجه در تعادل می‌شود.

نتایج تحلیل حساسیت نشان می‌دهد افزایش نرخ بهره واقع r باعث کاهش مخارج دولت و کسری بودجه، اما افزایش فشار مالیاتی، پایه پولی و در نهایت بدهی عمومی می‌شود؛ زیرا اثرات غیرمستقیم آن بر متغیرهای بودجه‌ای مسیر بدهی را صعودی می‌سازد. همچنین افزایش وزن بدهی τ در تابع زیان، با تأکید بیشتر بر سیاست‌های مالی انقباضی، موجب کاهش مخارج و افزایش مالیات می‌شود، هرچند اثری بر پایه پولی ندارد. این یافته‌ها اهمیت کالیبراسیون دقیق پارامترها را برجسته می‌کند و نشان می‌دهد تغییرات کوچک در ترجیحات یا متغیرهای کلان می‌تواند آثار بلندمدتی بر سیاست‌های مالی و پولی داشته باشد.

تحلیل حساسیت مقادیر تعادلی در حالت وابستگی متغیرهای مالی (کسری مالی) دولت :

تحلیل حساسیت زیر بر اساس معادلات حالت تعادلی مدل وابسته انجام شده است و مقادیر پارامترها مطابق با داده‌های مقاله کالیبره شده‌اند.

جدول شماره - ۴ : نتایج تحلیل حساسیت متغیرهای حالت تعادلی نسبت به نرخ بهره r (مدل وابسته)

متغیر	مشتق توابع $(\frac{\partial \psi}{\partial r})$	مقادیر عددی	تفسیر
φ_d (بدهی عمومی)	$\frac{\bar{G} - \bar{T} - \bar{m}}{\gamma_1}$	-۰,۶۸۹	بدهی عمومی در حالت تعادلی نسبت به افزایش نرخ بهره حساسیت منفی بالایی دارد.
φ_m (انتشار پول)	$\frac{d\bar{\theta}(2r - \rho)}{\gamma_3}$	۰,۱۵۴	پایه پولی در واکنش به افزایش نرخ بهره رشد می‌کند که بیانگر تعامل مثبت سیاست پولی و نرخ بهره در تعادل است.
φ_f (کسری مالی)	$-\frac{\bar{d}\tau(2r - \rho)}{\gamma_3}$	-۰,۱۵۴	کسری مالی $(G - T)$ با افزایش نرخ بهره کاهش می‌یابد، که نتیجه کاهش مخارج دولت و افزایش نسبی درآمد مالیاتی است.

منبع : یافته های پژوهش

جدول شماره ۵- : نتایج تحلیل حساسیت متغیرهای حالت تعادلی نسبت به وزن بدهی τ

(مدل وابسته)

متغیر	مشتق توابع $(\frac{\partial \psi}{\partial \tau})$	مقادیر عددی	تفسیر
φ_d (بودجه عمومی)	$-\frac{\bar{d}}{\gamma_1}$	-۱,۹۷	افزایش وزن بدهی موجب کاهش بدهی در حالت تعادلی می‌شود که نشان‌دهنده انضباط مالی قوی‌تر است.
φ_m (انتشار پول)	0	۰,۰۰۰	پایه پولی تحت تأثیر تغییرات وزن بدهی (τ) قرار نمی‌گیرد.

افزایش تمایل دولت به اجتناب از بدهی (τ) بالا تر) منجر به کاهش کسری بودجه می شود.	۰,۶۳۱	$-\frac{\bar{G} - \bar{T} - \bar{m}}{\gamma_1}$ $-\frac{\bar{d}(r^2 - r\rho + \theta) - \theta\bar{d}}{\gamma_3}$	(کسری مالی) φ_f
--	-------	---	-------------------------

منبع : یافته های پژوهش

تحلیل حساسیت مدل نشان می دهد با افزایش نرخ بهره واقعی r ، بدهی عمومی به دلیل بالا رفتن هزینه استقراض رشد می کند و پایه پولی نیز به دلیل فشارهای مالی افزایش می یابد، در حالی که کسری بودجه از طریق افزایش درآمدهای مالیاتی یا محدود شدن مخارج کاهش می یابد. همچنین، افزایش وزن بدهی τ موجب کاهش همزمان بدهی و کسری بودجه در تعادل و نشانگر تقویت انضباط مالی است، اما اثری بر پایه پولی ندارد و بیانگر آن است که تغییر ترجیحات سیاست گذار نسبت به بدهی، مستقیماً به سیاست پولی منتقل نمی شود.

۵.۲. مقایسه نتایج تعادل در ساختارهای مختلف بازی میان دولت و بانک مرکزی (غیرهمکارانه، همکارانه و استکالبرگ ^۱)

در ادبیات نظری مربوط به تعامل میان دولت و بانک مرکزی، نوع ساختار بازی میان این دو نهاد تأثیر قابل توجهی بر نتایج کلان اقتصادی دارد. سه حالت رایج از این تعاملات عبارتند از: بازی غیرهمکارانه، بازی همکارانه، و بازی استکالبرگ. در بازی غیرهمکارانه، هر بازیگر مستقل از دیگری و بدون هماهنگی سیاست گذاری می کند. در بازی همکارانه، سیاست گذاران با هدف مشترک و به صورت هم راستا تصمیم گیری می کنند. در بازی استکالبرگ نیز یکی از بازیگران (معمولاً دولت) به عنوان رهبر و دیگری (بانک مرکزی) به عنوان پیرو رفتار می کند، و تصمیمات خود را با پیش بینی واکنش طرف مقابل اتخاذ می نماید.

در این بخش، به منظور ارزیابی بهتر پویایی درونزای مدل و افزایش غنای تحلیلی پژوهش، نتایج حاصل از حل مدل در سه ساختار مذکور با یکدیگر مقایسه شده اند. این مقایسه هم در سناریوی استقلال ابزارهای مالی دولت (مخارج و مالیات به صورت جداگانه) و هم در حالت وابستگی آن ها (در قالب کسری مالی) انجام شده است. شاخص های مورد بررسی شامل کسری مالی، پایه پولی، سطح بدهی عمومی و سرعت همگرایی به تعادل می باشند.

الف (وقتی دو متغیر کنترلی درآمدهای مالیاتی و مخارج دولت به صورت وابسته و در قالب کسری مالی در مدل قرار می گیرند:

عنوان متغیر کنترلی	بازی غیر همکارانه	بازی همکارانه	بازی استکالبرگ
کسری مالی	۰.۰۶۷	۰.۰۶۱	۰.۰۳۴
انتشار پول	۰.۰۶۲	۰.۰۶۸	۰.۰۲۹
بدهی عمومی	۰.۱۶۱	۰.۱۷۹	۰.۱۶۲
سرعت همگرایی بسمت تعادل	۰.۳۰۷۴	۰.۴۲۴۶	۰.۴۳۳

منبع: یافته های پژوهش

ب (وقتی دو متغیر کنترلی درآمدهای مالیاتی و مخارج دولت به صورت مستقل در مدل قرار می گیرند:

¹ Stackelberg

عنوان متغیر کنترلی	بازی غیر همکارانه	بازی همکارانه	بازی استکالبرگ
کسری مالی	۰.۰۸	۰.۰۷۲	۰.۰۳۷
انتشار پول	۰.۰۷۴	۰.۰۷۸	۰.۰۳۲
بدهی عمومی	۰.۱۷۳	۰.۱۸۶	۰.۱۶۴
سرعت همگرایی بسمت تعادل	۰.۳۷۸	۰.۵۲۴	۰.۴۹۷

منبع: یافته های پژوهش

نتایج این مقایسه نشان می‌دهد که بازی استکالبرگ، که در آن دولت نقش رهبر و بانک مرکزی نقش پیرو را دارد، در هر دو ساختار سیاست مالی (مستقل یا وابسته)، بهترین عملکرد را از نظر پایداری مالی و سرعت همگرایی به تعادل ارائه می‌دهد. در این حالت، مقدار تعادلی بدهی عمومی پایین‌تر، کسری مالی و انتشار پول کمتر است.

این یافته‌ها نشان می‌دهد که طراحی نهادی به گونه‌ای که امکان شکل‌گیری روابط رهبری-پیروی میان نهادهای مالی و پولی فراهم شود (ولو به صورت ضمنی)، می‌تواند از کارآمدی بالاتری نسبت به ساختارهای صرفاً رقابتی یا حتی همکارانه برخوردار باشد. چنین بینشی برای کشورهایی نظیر ایران که با چالش بدهی عمومی، ناهماهنگی سیاست‌گذاری و تورم مزمن روبه‌رو هستند، حائز اهمیت می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

یکی از ارکان اساسی در حفظ ثبات اقتصاد کلان، کنترل و پایداری بدهی عمومی است؛ هدفی که تنها از طریق تعامل مؤثر و هماهنگ میان سیاست‌های مالی و پولی قابل تحقق است. در مدل پیشنهادی این مطالعه، تأثیر هم‌زمان سه متغیر کلیدی، درآمد مالیاتی، مخارج دولت و پایه پولی بر پویایی بدهی عمومی مورد بررسی قرار گرفت. زمانی که توازن میان درآمدهای مالیاتی و هزینه‌های دولت برقرار نباشد، کسری بودجه شکل می‌گیرد و دولت ناگزیر به استقراض بیشتر می‌شود. این روند فشار صعودی بر نرخ بهره وارد کرده و در صورت مدیریت ناکارآمد، زمینه‌ساز افزایش تورم خواهد بود. به‌ویژه اگر مخارج دولت بدون پشتوانه درآمدی کافی افزایش یابد، این عدم تعادل منجر به رشد شتابان بدهی و تضعیف ثبات اقتصادی می‌شود. برای دستیابی به پایداری بدهی، دولت باید میان اجزای سیاست مالی خود یعنی درآمد و هزینه هماهنگی ایجاد کند و این تصمیمات را در چارچوبی یکپارچه اتخاذ نماید. از طرف دیگر، بانک مرکزی نیز باید با کنترل حجم پایه پولی، از بروز تورم ناشی از تأمین مالی کسری بودجه جلوگیری کند. در این چارچوب، هماهنگی میان نهادهای سیاست‌گذار اهمیت بسزایی دارد و نقش حیاتی در حفظ تعادل اقتصادی ایفا می‌کند.

مطالعه حاضر با بهره‌گیری از مدل‌سازی اقتصادی در حوزه بازی‌های دیفرانسیلی نشان می‌دهد که هماهنگی سیاست‌های مالی و پولی، به عنوان یک استراتژی مؤثر در مدیریت بدهی عمومی و کاهش کسری بودجه، می‌تواند ایفای نقش نماید. در این چارچوب، دولت با تنظیم دقیق و ایجاد ارتباط مستقیم و کارا بین دو ابزار اصلی سیاست مالی خود یعنی مخارج دولتی و درآمدهای مالیاتی، به گونه‌ای که به هم وابسته باشند، می‌تواند بر پایداری مالی اقتصاد اثرگذار باشد. از سوی دیگر، بانک مرکزی به عنوان نهاد سیاستگذار پولی، با به کارگیری ابزارهایی مانند کنترل پایه پولی، می‌تواند از سیاست‌های مالی دولت حمایت کرده و به کاهش سطح بدهی عمومی کمک نماید. به عبارت دیگر، هماهنگی سیاست‌های مالی و پولی، با ایجاد یک رویکرد جامع و هماهنگ در مدیریت اقتصاد کلان، می‌تواند به بهبود وضعیت مالی دولت، کاهش ریسک‌های ناشی از نوسانات اقتصادی و در نهایت، ارتقای رفاه اقتصادی جامعه کمک نماید.

هنگامی که دولت با کسری بودجه روبه‌رو می‌شود، می‌کوشد با بهینه‌سازی ترکیب مخارج و مالیات، وابستگی خود به سیاست‌های پولی انبساطی بانک مرکزی را کاهش دهد و مسیر پایداری مالی را دنبال کند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که هماهنگی در استفاده از این ابزارها می‌تواند اثربخشی سیاست‌های مالی را افزایش داده، فشار کسری بودجه و سطح بدهی عمومی را کاهش دهد و نیاز به چاپ پول را به حداقل برساند. بنابراین، تقویت همکاری میان دولت و بانک مرکزی نه تنها به کنترل تورم و نقدینگی کمک می‌کند، بلکه به بهبود پایداری مالی و مدیریت کارآمدتر اقتصاد کلان نیز منجر می‌شود.

همچنین ساختار تعامل میان دولت و بانک مرکزی تأثیر معناداری بر نتایج تعادلی دارد. مقایسه نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی میان بازی‌های غیرهمکارانه، همکارانه و استکالبرگ نشان می‌دهد که در حالت استکالبرگ که در آن دولت نقش رهبر و بانک مرکزی نقش پیرو را ایفا می‌کند عملکرد بهتری از نظر کاهش کسری بودجه، کنترل پایه پولی، تثبیت بدهی عمومی مشاهده می‌شود. این یافته‌ها بیانگر آن است که وجود یک نظم سلسله‌مراتبی در فرآیند تصمیم‌گیری میان سیاست‌گذاران می‌تواند به هدایت پویای اقتصاد کلان در مسیر پایداری مالی کمک کند. از این رو، طراحی نهادی که امکان اعمال رهبری راهبردی دولت را در کنار حفظ استقلال بانک مرکزی فراهم کند، می‌تواند راهکاری مؤثر برای بهبود مدیریت بدهی عمومی در کشورهایی مانند ایران باشد.

تامین مالی: هیچ حمایت مالی وجود ندارد.

مشارکت نویسندگان: نویسندگان به طور مساوی در مفهوم سازی و نگارش اثر مشارکت داشتند. همه نویسندگان محتوای مقاله را تایید کردند و در مورد تمام جنبه های کار توافق داشتند.

تعارض منافع نویسندگان: هیچ گونه تضاد منافع را اعلام نمی کنند.

تشکر و قدردانی: نویسندگان از مسئولین و داوران این مقاله قدردانی می کنند.

منابع

Adrian, T., Gaspar, V., & Gourinchas, P. O. (2024). The fiscal and financial risks of a high-debt, slow-growth world. *IMF Blog*, 28.

<https://www.imf.org/en/Blogs/Articles/2024/03/28/the-fiscal-and-financial-risks-of-a-high-debt-slow-growth-world>

Ahmed, M., Maqsood, H., Ali, M., & Mahmood, S. (2025). The Role of Central Banks in Managing Inflation and Financial Crises: Strategies, Challenges, and Global Case Perspectives. *ACADEMIA International Journal for Social Sciences*, 4(1), 575-596.

<https://doi.org/10.63056/ACAD.004.01.0107>

Alesina, A., Tabellini, G. (1987). Rules and discretion with noncoordinated monetary and fiscal policies. *Economic Inquiry*, 25(4), 619-630. <https://doi.org/10.1111/j.1465-7295.1987.tb00764.x>

Aligishiev, Z., Massara, A., & Wang, C. (2023). Debt dynamics and fiscal space in developing economies. *IMF Working Paper*, WP/23/45.

<https://doi.org/10.5089/9798400233708.022>

Anevlaivis, T., Papavassilopoulos, G., Engwerda, J., Van Aarle, B. (2019). Debt stabilization in the presence of endogenous risk premia: A dynamic game approach. *Macroeconomic Dynamics*, 23(7), 2616-2648. <https://doi.org/10.1017/S1365100517000906>

Basar, T., & Olsder, G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1998). <https://doi.org/10.1137/1.9781611971132.fm>

Bianchi, J., & Coulibaly, L. (2024). *Financial integration and monetary policy coordination* (NBER Working Paper No. 32009). National Bureau of Economic Research. <https://www.nber.org/papers/w32009>. <https://doi.org/10.3386/w32009>

Bonaparte, Y. (2024). *Global Financial Frontiers: Navigating the World of International Finance*. Cambridge Scholars Publishing. <https://doi.org/10.33774/978-1-0364-0826-8>

Cantore, C., & Leonardi, E. (2025). Monetary-fiscal interaction and the liquidity of government debt. *European Economic Review*, 104979. <https://doi.org/10.1016/j.euroecorev.2024.104979>

Chafwehé, B., Oikonomou, R., Priftis, R., Vogel, L. (2022). Optimal Monetary Policy with and without Debt. *LIDAM Discussion Papers IRES 2022027*, Université catholique de Louvain, Institut de Recherches Economiques et Sociales (IRES). <https://hdl.handle.net/10419/277596>

Chibi, A., Zahaf, Y., & Chekouri, S. (2024). Strategic interaction between monetary and fiscal policy in Algeria: A game theory approach. *International Journal of Business and Economic Studies*, 6(4), 262–280. <https://doi.org/10.54821/uiecd.1539098>

Dai, M., Sidiropoulos, M. (2011). Fiscal disciplining effect of central bank opacity: Stackelberg versus Nash equilibrium. *Economics Bulletin*, AccessEcon, vol. 31(4), 3068-3076. <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/29843/>

Di Bartolomeo, G., Semmler, W., & Saltari, E. (2022). A Nash equilibrium for differential games with moving-horizon strategies (No. 00160). Department of Communication, University of Teramo. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4040114>

Di Bartolomeo, G., Di Gioacchino, D. (2008). Fiscal-monetary policy coordination and debt management: a two-stage analysis. *Empirica*, 35, 433-448. <https://doi.org/10.1007/s10663-008-9077-0>

Engwerda, J., Van Aarle, B., Plasmans, J., Weeren, A. (2013). Debt stabilization games in the presence of risk premia. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(12), 2525-2546. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2013.08.005>

Engwerda, J. C., Mahmoudinia, D., Isfahani, R.D. (2016) Government and central bank interaction under uncertainty: A differential games approach. *Iranian Economic Review*, 20, 225–259. DOI: <https://doi.org/10.22059/ier.2016.58950>

Engwerda, J. (2005). *LQ dynamic optimization and differential games*. John Wiley and Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/047001525X>

Eslamllooian, K., Asadzadeh, A. H. (2014). Estimating the time preference rate in Iran using a recursive algorithm. *Journal of Economic Research*, 49(2). <https://doi.org/10.22059/jte.2014.51772>

Haj-Amini, M. (2019). A qualitative meta-analysis of the role of budgetary reforms in controlling persistent moderate inflation in Iran. *Iranian Economic Research*, 24(80), 151–202(In Persian). <https://doi.org/10.22054/ijer.2019.11115>

Jackson, A., & Jackson, T. (2025). *Public debt and the post-growth challenge: The case for a flexible monetary and fiscal policy framework* (SSRN Working Paper No. 5243230). Social Science Research Network. <https://doi.org/10.2139/ssrn.5243230>

Li, Z., Marelli, D., Fu, M., Zhang, H. (2022). LQG Differential Stackelberg Game under Nested Observation Information Patterns. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68 (8), 5111-5118. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3227696>

Mahmoudinia, D., Esfahani, R.D., Engwerda, J., Dastjerdi, R.B. (2016). Game theory and its role in determining optimal policies and strategic interaction between fiscal and monetary policymakers:(Application of differential game theory and stackelberg games). *Quarterly Journal of Applied Economic Studies in Iran*, 5(18), 1-34. <https://doi.org/10.22084/aes.2016.1182>

Mavrodimitrakis, C. (2022). Debt stabilization and financial stability in a monetary union: Market versus authority-based preventive solutions. *International Journal of Finance and Economics*, 27(2), 2582-2599. <https://doi.org/10.1002/ijfe.2287>

Nguyen, T.A.N., Luong, T.T.H. (2021). Fiscal Policy, Institutional Quality, and Public Debt: Evidence from Transition Countries. *Sustainability*, 13(19), 10706. <https://doi.org/10.3390/su131910706>

Nikooeinejad, Z., Heydari, M., Saffarzadeh, M., Loghmani, G.B., Engwerda, J. (2021). Numerical simulation of non-cooperative and cooperative equilibrium solutions for a stochastic government debt stabilization game. *Computational Economics*, 1-27.

<https://doi.org/10.1007/s10614-021-10188-9>

Petit, M. L. (1989). Fiscal and monetary policy coordination: A differential game approach. *Journal of Applied Econometrics*, 4(2), 161-179. <https://doi.org/10.1002/jae.3950040206>

<https://doi.org/10.1007/s10614-021-10177-8>

Stawska, J., Malaczewski, M., Malaczewska, P., Stawasz-Grabowska, E. (2023). The central bank or the government—who really dictates the terms of the policy-mix cooperation in economies with an independent monetary policy. *Economic Research-Ekonomska*

<https://doi.org/10.1080/1331677X.2022.2142258>

Tabellini, G. (1986) Money, debt and deficits in a dynamic game. *Journal of Economic Dynamics and Control* 10, 427–442. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(86\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0165-1889(86)90006-0)

Van aarle, B., L. Bovenberg, and Raith, M. (1997). Is there a tragedy of a common Central Bank A dynamic analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(2–3), 417–447.

[https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(96\)00945-2](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(96)00945-2)

Van den Broek, B. (2002). Moving horizon control in dynamic games. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(6), 937–961. [https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(00\)00081-2](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(00)00081-2)